TRẦN THỊ VÂN ANH

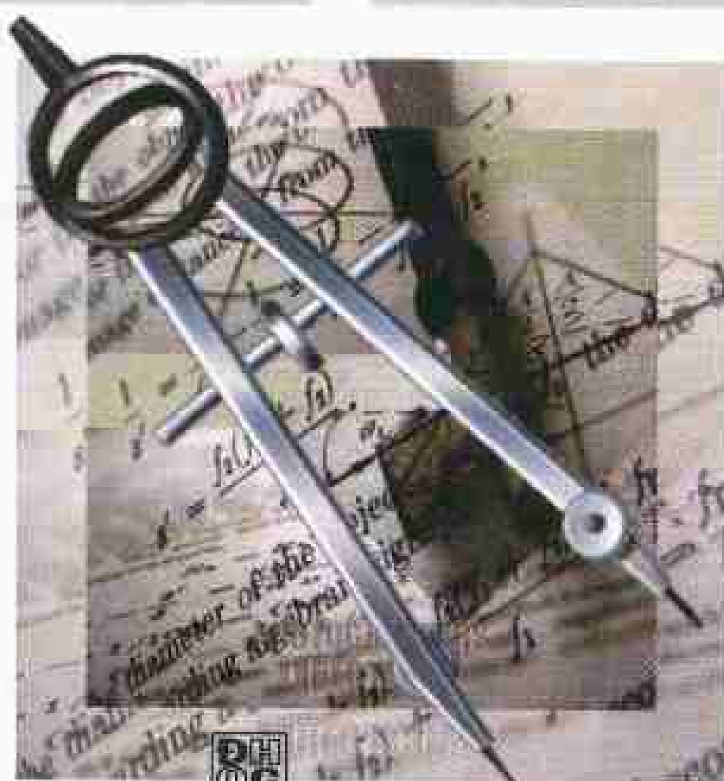






BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC 9

- Bồi dưỡng học sinh khá giỏi.
- Rèn kĩ năng giải toán từ cơ bản đến nâng cao.





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN THỊ VÂN ANH



BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC



- Bồi dưỡng học sinh khá giỏi.
- Rèn kĩ năng giải toán từ cơ bản đến nâng cao.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập nội dung
BÍCH HẠNH
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN HÌNH HỌC 9
Mã số: 1L-315ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH MTV Song Nguyên
Số xuất bản: 238-2010/CXB/23-45/ĐHQGHN, ngày 12/03/2010
Quyết định xuất bản số: 315LK-TN/ĐHQGHN
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Để đáp ứng nhu cầu học tập của học sinh, tài liệu tham khảo cho giáo viên, chúng tôi xin giới thiệu cuốn sách

Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán
HÌNH HỌC 9

Trong quyển sách này, tác giả đã phân chia thành 7 chuyên đề cơ bản sau, bao gồm:

Chuyên đề 1: Các bài toán tính toán hình học
Chuyên đề 2: Các bài toán chứng minh về đa giác.
Chuyên đề 3: Các bài toán chứng minh về đường tròn.
Chuyên đề 4: Các bài toán dựng hình, quỹ tích.
Chuyên đề 5: Các bài toán hình học không gian.
Chuyên đề 6: Bài tập tổng hợp.
Chuyên đề 7: Một số đề thi học sinh giỏi và đề thi tự luyện

Trong mỗi phần, sách được cấu trúc gồm 4 nội dung chính như sau:

1. Phương pháp chung.
2. Các ví dụ minh họa.
3. Bài tập vận dụng.
4. Hướng dẫn và đáp số.

Các bài tập được lựa chọn từ dễ đến khó, bám sát theo chuẩn kiến thức kỹ năng của chương trình SGK Toán 9 và nhiều bài tập được tác giả đưa ra nhiều phương pháp khác nhau để bạn đọc tham khảo thêm. Với mỗi dạng bài tập cơ bản đều có phương pháp giải cụ thể và ví dụ minh họa. Ngoài ra, các bài tập đều có hướng dẫn giải chi tiết, dễ hiểu. Nhiều ví dụ có lời nhận xét để giúp học sinh tránh các sai lầm cơ bản. Mặc dù đã hết sức cố gắng, song lời giải các bài toán trong quyển sách này có khi chưa phải là phương án giải hay nhất và cũng có thể còn thiếu sót. Tuy vậy, tác giả hy vọng rằng quyển sách này sẽ giúp ích cho bạn đọc trong quá trình học tập và giảng dạy, đặc biệt là quá trình tự học. Chúc các em học sinh và các thầy cô giáo quan tâm đến quyển sách này thành công trên mọi lĩnh vực. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các em học sinh và các thầy cô giáo, tác giả xin chân thành cảm ơn trước.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ:

- ***Trung tâm Sách giáo dục Anpha*** .
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
- ***Công ti Sách - thiết bị giáo dục Anpha***
50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, TP.HCM
ĐT: 08.62676463, 38547464.
Email: *alphabookcenter@yahoo.com*

Xin trân trọng cảm ơn!

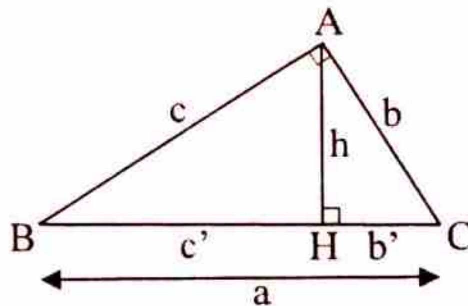
1. Các bài toán tính toán hình học

Một số kiến thức cơ bản

1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

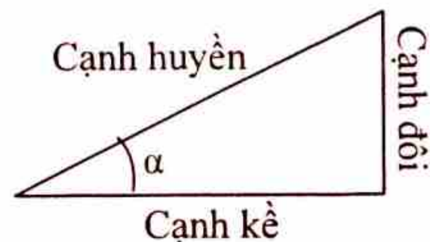
Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (hình vẽ). Ta có:

1. $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$.
2. $b^2 + c^2 = a^2$ (*định lí Py-ta-go*).
3. $h^2 = b'c'$.
4. $ah = bc$.
5. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.



2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Các tỉ số lượng giác của góc nhọn α (hình vẽ) được định nghĩa như sau:



sin α = *cạnh đối / cạnh huyền;*
cos α = *cạnh kề / cạnh huyền;*
tan α = *cạnh đối / cạnh kề;*
cot α = *cạnh kề / cạnh đối;*

Với hai góc α và β phụ nhau, ta có: $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$; $\tan\alpha = \cot\beta$; $\cot\alpha = \tan\beta$.

Với một số góc đặc biệt, ta có:

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$; $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

3. Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề; mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

4. Độ dài đường tròn *còn được gọi là chu vi hình tròn và được kí hiệu là C. Gọi bán kính của đường tròn là R, ta có* $C = 2\pi R$.

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n được tính theo công thức $l = \frac{\pi R n}{180}$.

Diện tích S của hình tròn bán kính R được tính theo công thức $S = \pi R^2$.

Các dạng bài tập cơ bản

1. Tính độ dài các đoạn thẳng

2. Tính số đo các góc

3. Tính độ dài cung tròn

4. Tính dện tích các hình

Các ví dụ minh họa

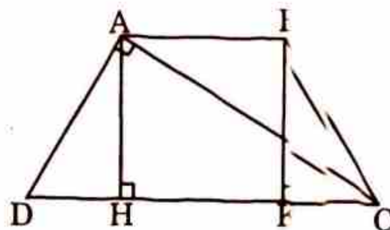
1. Tính độ dài các đoạn thẳng

Ví dụ 1: Hình thang cân ABCD có đáy lớn CD = 10cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.

Giải

Gọi AH, BK là đường cao của hình thang.

Đặt AB = AH = BK = x.



Dễ dàng chứng minh được $DH = CK = \frac{10-x}{2}$,

do đó: $HC = \frac{10+x}{2}$.

Xét tam giác ADC vuông tại A ta có $AH^2 = HD.HC$.

Do đó: $x^2 = \frac{10-x}{2}.\frac{10+x}{2} = \frac{100-x^2}{2}$. Từ đó $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Đường cao của hình thang bằng $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Ví dụ 2: Tính cạnh đáy BC của tam giác cân ABC biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15,6cm và đường cao ứng với cạnh bên bằng 12cm.

Giải

Gọi AH, BK là các đường cao của ΔABC.

Ta có: $AC = \frac{BC.AH}{BK} = \frac{BC.15,6}{12} = 1,3BC$. Đặt BC = x thì AC = 1,3x. Theo định lí Pytago: $AH^2 + HC^2 = AC^2$ nên $15,6^2 + (\frac{x}{2})^2 = (1,3x)^2$

Ta tính được x = 13. Vậy BC = 13cm.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết BD = 7,5 cm và DC = 10cm. Tính các độ dài AH, BH, HD.

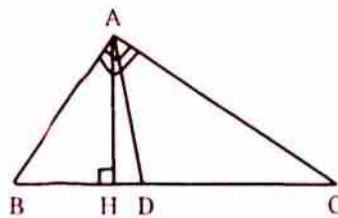
Giải

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{7,5}{10} = \frac{3}{4}$ nên tính được AB = 10,5 cm và AC = 14cm.

Nhờ công thức ah = bc ta tính được AH = 8,4 cm.

Nhờ công thức $c^2 = a.c'$ ta tính được BH = 6,3cm nên HD = 1,2cm

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 20cm. HC = 9cm. Tính độ dài AH.



Giải

Đặt BH = x, ta có $AB^2 = BC.BH$ nên $20^2 = (x+9).x$.

Giải phương trình trên, ta được $(x-16)(x+25) = 0$ nên x = 16 (thích hợp).

Từ đó AH = 12cm.

Ví dụ 5: a. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0, AB = 3cm, AC = 6cm$. Tính độ dài đường phân giác AD.

b. Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

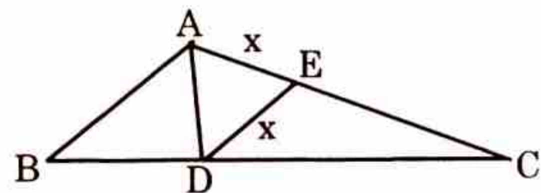
Tính số đo góc BAC.

Giải

a. Kẻ DE // AB, ΔADE đều. Đặt AD = DE = EA = x.

Ta có: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{6-x}{6}$.

Từ đó x = 2. Vậy AD = 2cm.



b. Kẻ DE // AB. Đặt DE = EA = x. Ta có:

$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{AC-x}{AC} = 1 - \frac{x}{AC}$

$\Rightarrow \frac{x}{AB} + \frac{x}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{x}$ (1)

Theo đề bài $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$. Suy ra AD = x, ΔADE đều, $\widehat{ABC} = 120^0$.

Ví dụ 6 : Cho tam giác BC có AB = 6cm, AC = 8cm, các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Tính độ dài BC.

Giải:

Gọi G là giao điểm của BD và CE. Đặt GD = x, GE = y thì GB = 2x, GC = 2y. Áp dụng định lý Pi ta go cho các tam giác vuông BGE, CGD

Ta có $EG^2 + BG^2 = EB^2 = 9 \Rightarrow 5x^2 = 9, DG^2 + CG^2 = DB^2 = 16 \Rightarrow 5y^2 = 16$

suy ra $x^2 + y^2 = 5$. Áp dụng định lý Pi ta go cho tam giác vuông BCG ta có $4(x^2 + y^2) = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$.

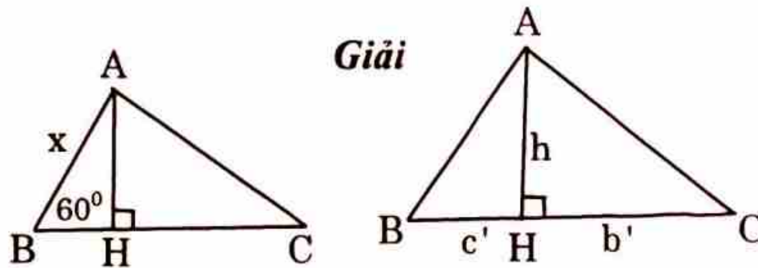
Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0, BC = 8cm, AB + AC = 12cm$. Tính các độ dài AB, AC.

Giải

Đặt AB = x. Ta có $AH^2 + HC^2 = AC^2$ nên $\frac{3x^2}{4} + (8 - \frac{x}{2})^2 = (12-x)^2$. Giải phương trình trên ta được x = 5. Đáp số: AB = 5cm, AC = 7cm.

Ví dụ 8: Trong một tam giác vuông. Đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng $54cm^2$ và $96cm^2$. Tính độ dài cạnh huyền.

Giải



Ta có hc' = 54.2, hb' = 96.2, mà $h^2 = b'.c'$ nên $h^4 = 12^4$, suy ra h = 12.

Do đó: $BC = \dfrac{2(54+96)}{12} = 25(cm)$.

Ví dụ 9: Một hình thoi có diện tích bằng một nửa diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỉ số của đường chéo dài và đường chéo ngắn của hình thoi .

Giải

Gọi 2m và 2n là độ dài các đường chéo của hình thoi cạnh a.

Ta có $m^2 + n^2 = a^2$ và $2mn = \dfrac{a^2}{2}$.

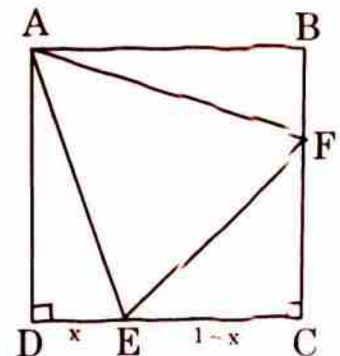
Từ đó ta tính được $m + n = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, m - n = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Do đó $m = \dfrac{a(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}, n = \dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2+\sqrt{3}$.

Ví dụ 10: Cho hình vuông ABCD có cạnh 1dm. Tính cạnh của tam giác đều AEF có E thuộc cạnh CD và F thuộc cạnh BC.

Giải



Đặt DE = x thì CE = 1 − x thì:

$CF = CE = 1 - x$, $AE^2 = x^2 + 1$.

Đưa về phương trình:

$x^2 - 4x + 4 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$.

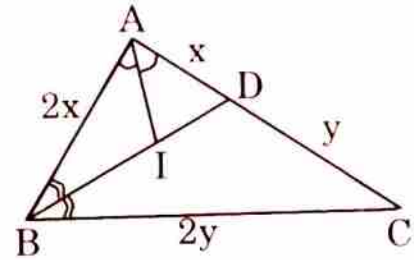
Do x < 1 nên ta chọn $x = 2 - \sqrt{3}$.

$EF = (1-x)\sqrt{2} = (\sqrt{3}-1)\sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}\,(dm)$.

Ví dụ 11: Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD ở I. Biết $IB = 10\sqrt{5}cm, ID = 5\sqrt{5}cm$, tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Theo tính chất đường phân giác:



$\frac{AB}{AD} = \frac{IB}{ID} = \frac{10\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = 2, \frac{BC}{CD} = \frac{BA}{AD} = 2.$

Đặt $AD = x$, $DC = y$. Ta có $AB = 2x$,

$BC = 2y$ nên $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2x)^2 = (15\sqrt{5})^2 & (1) \\ (2x)^2 + (x+y)^2 = (2y)^2 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta được $x = 15$. Thay vào (2) và rút gọn được

$y^2 - 10y - 375 = 0 \Leftrightarrow (y-25)(y+15) = 0$

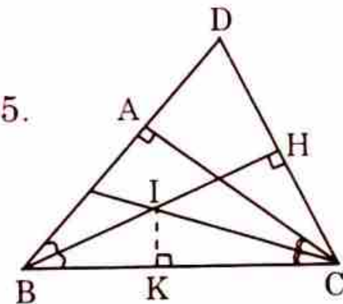
Từ đó $y = 25$. Đáp số $600\,cm^2$.

Ví dụ 12: Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác.

a. Biết $AB = 5cm$, $IC = 6cm$. Tính độ dài BC.

b. Biết $IB = \sqrt{5}cm, IC = \sqrt{10}cm$. Tính các độ dài AB, AC.

Giải



a. Kẻ $CH \perp BI$, CH cắt BA tại D.

ΔBCD cân nên $CH = HD$. Đặt $BC = x$ thì $AD = x - 5$.

ΔCHI vuông cân có:

$\widehat{CIH} = 45^0 \Rightarrow CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow DC = \frac{12}{\sqrt{2}}.$

Xét ΔACD vuông có:

$AD^2 + AC^2 = DC^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (x^2 - 25) = 72$

Rút gọn được $x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+4) = 0.$

Đáp số $BC = 9cm$.

b. Kẻ $CH \perp BI$. Ta có ΔCIH vuông cân nên $CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}(cm).$

Suy ra $BH = 2\sqrt{5}cm$. Xét ΔBHC vuông; $BC^2 = BH^2 + CH^2 = 20 + 5 = 25$ nên $BC = 5cm$.

Ta có ΔBCD cân tại $B \Rightarrow BC = BD = 5cm$; $CD = 2CH = 2\sqrt{5}$ cm

$2S_{BCD} = BH.CD = AC.BD \Rightarrow AC = \frac{BH.CD}{BD} = \frac{BH.CD}{BC}$

$AC = \frac{2\sqrt{5}.2\sqrt{5}}{5} = 4cm \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{25-16} = 3cm$

Ví dụ 13: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác, M là trung điểm của BC.

a. Biết $AB = 6cm$, $AC = 8cm$. Tính $\widehat{BIM}$.

b. Biết $\widehat{BIM} = 90^0$. Ba cạnh của tam giác ABC tỉ lệ với ba số nào?

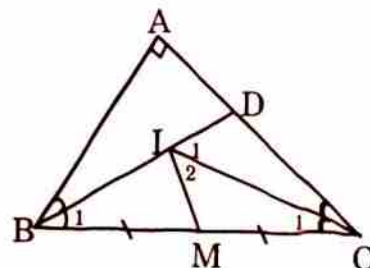
Giải

BI cắt AC tại D.

a. Dễ dàng tính được: BC = 10cm, DA = 3cm, DC = 5cm.

Do DC = MC = 5cm nên $\Delta IMC = \Delta IDC$ (c.g.c)

Suy ra $\hat{I}_2 = \hat{I}_1 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 45^0$. Vậy $\widehat{BIM} = 90^0$.



b. Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Ta sẽ biểu thị a và c theo b.

Trước hết có $a^2 - c^2 = b^2$ (1).

Do $\widehat{BIM} = 90^0$, $\hat{I}_1 = 45^0$ nên $\hat{I}_2 = 45^0$.

Ta có $\Delta DIC = \Delta MIC$ (g.c.g) nên DC = MC.

Do đó a = 2DC, c = 2AD (tính chất đường phân giác).

Suy ra $a + c = 2(DC + AD) = 2AC = 2b$. (2)

Ta có $a^2 - c^2 = b^2, a + c = 2b$. Giả sử $b \geq c$, ta được $a = \frac{5b}{4}, c = \frac{3b}{4}$.

Do đó $a : b : c = \frac{5}{4} : 1 : \frac{3}{4} = 5 : 4 : 3$.

Ví dụ 14: Cho tam giác ABC vuông tại A. BC = $3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông ADEF cạnh 2cm có D thuộc AB, E thuộc BC, F thuộc AC. Tính các độ dài AC, AB.

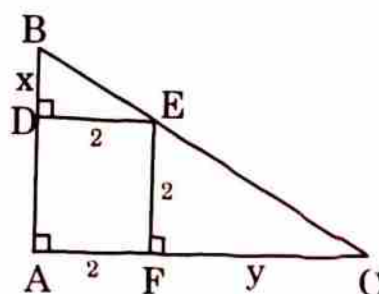
Giải

Đặt BD = x, FC = y.

Các tam giác BDE và EFC đồng dạng nên $\frac{x}{2} = \frac{2}{y}$, suy ra xy = 4 (1)

Ta lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 45$. (2)

Từ (2) suy ra $x^2 + y^2 + 4(x + y) = 37$.



Đặt x + y = a, kết hợp với (1) ta được:

$a^2 - 8 + 4a = 37 \Leftrightarrow (a-5)(a+9) = 0$ nên a = 5.

Suy ra $y = 5 - x$. Thay y bởi $5 - x$ vào (1) được:

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0$.

Với x = 1 thì y =4, khi đó AB = 3cm, AC = 6cm.

Với x = 4 thì y = 1, khi đó AB = 6cm, AC = 3cm.

Ví dụ 15: Tam giác ABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}cm, IB = 3cm$. Tính độ dài AB.

Giải

Đường vuông góc với AB tại A cắt BI ở K.

Ta có $\widehat{K}$ phụ với $\hat{B}_1$, $\widehat{AIK}$ phụ với $\hat{B}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, nên $\widehat{K} = \widehat{AIK}$.

Kẻ $AH \perp BK$. Đặt $IH = HK = x$.

Xét ΔABK vuông có:

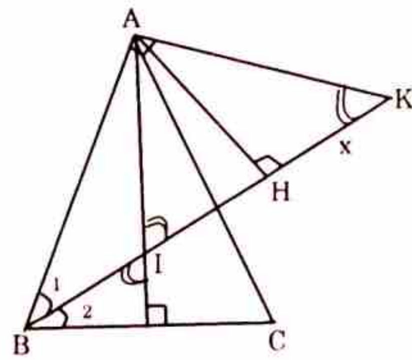
$AK^2 = KH.HB$ hay $(2\sqrt{5})^2 = x(2x+3)$.

Rút gọn phương trình:

$2x^2 + 3x - 20 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)(x+4) = 0$.

Nghiệm dương $x = 2,5$ thích hợp.

Suy ra $KB = 8$cm. Từ đó $AB = 2\sqrt{11}$ cm.



Ví dụ 16: Tam giác ABC cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết AH= 14cm. BH = HC = 30cm.

Giải

Gọi E là điểm đối xứng với H qua BC. Ta có BHCE là hình thoi, ΔABE vuông tại B nên $BE^2 = ED.EA$. Đặt $DE = x$. Có 2 trường hợp:

a. $\widehat{BAC} < 90^0$ (h.a). Ta có $x(2x+14) = 30^2$.

Rút gọn phương trình $x^2 + 7x - 450 = 0 \Leftrightarrow (x-18)(x+25) = 0$.

Nghiệm dương $x = 18$ thích hợp. Từ đó $AD = 32$cm.

b. $\widehat{BAC} > 90^0$ (h.b). Ta có

$x(2x-14) = 30^2$.

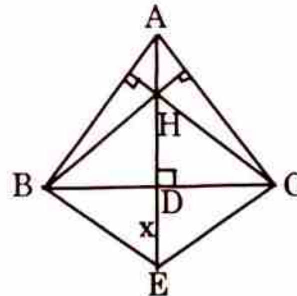
Rút gọn phương trình

$x^2 - 7x - 450 = 0$

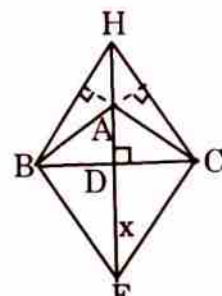
$\Leftrightarrow (x-25)(x+18) = 0$.

Nghiệm dương $x = 25$ thích hợp.

Từ đó $AD = 11$cm.



a)



b)

Ví dụ 17: Tam giác ABC có BC = 40cm, đường phân giác AD dài 45cm, đường cao AH dài 36cm. Tính các độ dài BD, DC.

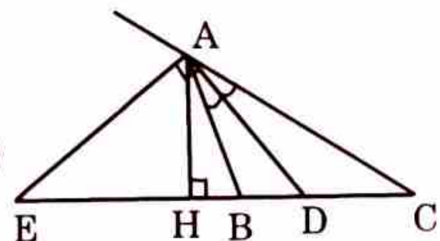
Giải

Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$. Ta tính được $HD = 27$cm. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E.

Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE.DH$.

Suy ra $DE = \dfrac{AD^2}{DH} = \dfrac{45^2}{27} = 75(\text{cm})$.

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{75-x}{75+y}$. (1)



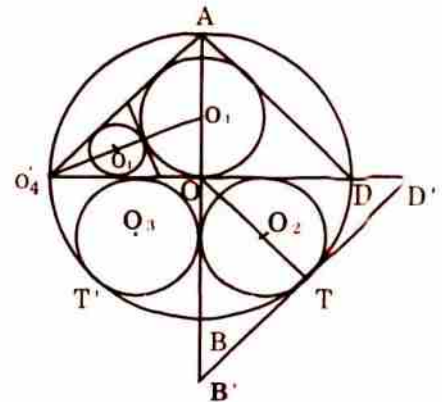
Mặt khác $x + y = 40$ (2). Thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x-100) = 0.$$

Do $x < 40$ nên $x = 15$, từ đó $y = 25$. Vậy $DB = 15$cm, $DC = 25$cm.

Ví dụ 18: Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Đường tròn (O_1) nội tiếp trong tam giác ACD. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với 2 cạnh OB và OD của tam giác OBD và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Đường tròn (O_3) tiếp xúc với 2 cạnh OB và OC của tam giác OBC và tiếp xúc trong với đường tròn (O). Đường tròn (O_4) tiếp xúc với 2 tia CA và CD và tiếp xúc ngoài với đường tròn (O_1). Tính bán kính của các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) theo R.

Giải



+ Gọi r là độ dài bán kính đường tròn (O_1).

Ta có: $S_{\Delta ACD} = pr$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{2}(2AC + CD)r$$

$$\Leftrightarrow R^2 = R(\sqrt{2} + 1)r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}}.$$

Đường tròn (O_2) tiếp xúc với OB và OD nên tâm O_2 ở trên tia phân giác của góc $\widehat{BOD}$, (O_2) lại tiếp xúc trong với (O) nên tiếp điểm T của chúng ở trên đường thẳng nối 2 tâm O và O_2, chính là giao điểm của tia phân giác $\widehat{BOD}$ với (O).

+ Đường thẳng đi qua T vuông góc với OT cắt 2 tia OB và OD tại B' và D' là tiếp tuyến chung của (O) và (O_2). Do đó (O_2) là đường tròn nội tiếp Δ OB'D'.

Δ OB'D' có phân giác $\widehat{O}$ vừa là đường cao, nên nó là tam giác vuông cân và $B'D' = 2OT = R, OB' = OD' = R\sqrt{2}$, suy ra: Δ B'OD' = Δ ACD.

Vậy: Bán kính của (O_2) cũng bằng $r = \dfrac{R}{1 + \sqrt{2}}$.

Hai hình quạt OBC và OBD đối xứng với nhau qua AB nên (O_3) cũng bằng $r = \dfrac{R}{1 + \sqrt{2}}$.

Đường tròn (O_4) có hai trường hợp.

a. Trường hợp 1: (O_4) ở bên trái (O_1):

Kẻ tiếp tuyến chung của (O_4) và (O_1) tại tiếp điểm K cắt AC và AD tại E và F. CO và CA còn là 2 tiếp tuyến của (O_3), nên chu vi của VCEF bằng 2CO, suy ra nửa chu vi của nó là p = R.

Ta có: $CO_1 = \sqrt{R^2 + r^2} = \dfrac{R\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}$

$$CK = CO_1 - O_1K = \frac{R\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{R}{1 + \sqrt{2}} = \frac{R(4 + 2\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{2}}$$

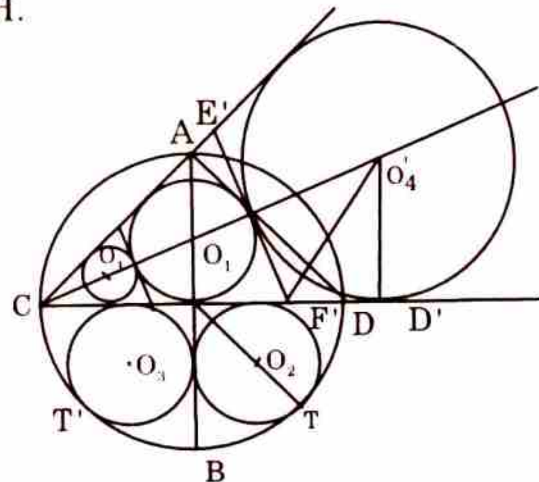
$$\frac{KF}{KC}=\frac{O_1O}{CO}=\tan 22^0 30'=\frac{1}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow KF=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1)}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$S_{\Delta CKF}=CK.KF=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1)^2}{(1+\sqrt{2})^3}$$

Suy ra bán kính của đường tròn (O_4) là: $r_4=\dfrac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1)^2}{(1+\sqrt{2})^3}$

b. ***Trường hợp 2:*** (O'_4) ở bên phải (O_1):

Khi đó: K' là tiếp điểm của 2 đường tròn, tiếp tuyến chung cắt CA và CD tại E' và F', CD tiếp xúc với (O'_4) tại H.



$$CK' = CO_1+O_1K'$$

$$=\frac{R\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}}+\frac{R}{1+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1)}{1+\sqrt{2}};$$

$$F'H=K'F'=CK'\tan 22^0 30'$$

$$=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1)}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{CK'}{CF'}=\frac{CO}{CO_1} \Leftrightarrow CF'=\frac{CK'.CO_1}{CO}=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$CH=CF'+F'H=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{(1+\sqrt{2})^2}+\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)}{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$CH=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)^2}{(1+\sqrt{2})^2}.$$

Suy ra : bán kính của đường tròn (O'_4) là:

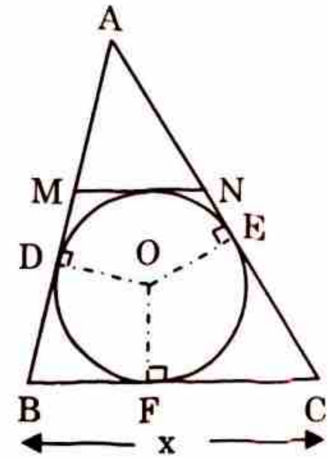
$$r'_4=O'_4H=CH\tan 22^0 30'=\frac{R(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1)^2}{(1+\sqrt{2})^3}$$

Ví dụ 9. Tam giác ABC có chu vi 80cm ngoại tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự ở M, N.

a. Cho biết MN = 9,6cm. Tính độ dài BC.

b. Cho biết $AC - AB = 6cm$. Tính các độ dài AB, AC, BC để MN có giá trị lớn nhất.

Giải



MN // BC nên tam giác AMN và tam giác ABC đồng dạng, do đó $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{\text{chu vi AMN}}{\text{chu vi ABC}}$. (1)

Gọi D, E, F theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn (O) với AB, AC, BC.

Ta có AD = AE, BD = BF, CE = CF.

Chu vi tam giác AMN bằng:

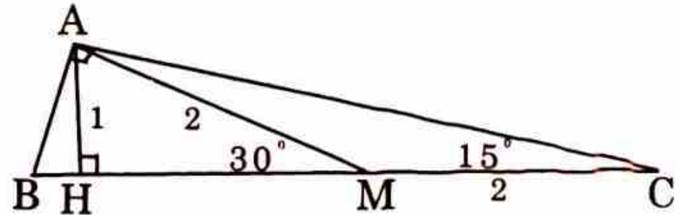
AD + AE = AB + AC − BC. (2)

a. Đặt BC = x.

Từ (2) suy ra chu vi tam giác AMN bằng $80 - 2BC$, hay $80 - 2x$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{9,6}{x} = \dfrac{80 - 2x}{80}$. Đưa về phương trình: $x^2 - 40x + 384 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 24)(x - 16) = 0$



Có hai đáp số:

BC = 24cm, hoặc BC = 16cm.

b. Đặt BC = x.

Từ (1) suy ra $\dfrac{MN}{x} = \dfrac{80 - 2x}{80}$ nên $40MN = x(40 - x) = -(x - 20)^2 + 400 \le 400$.

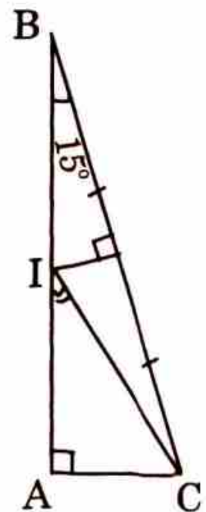
max MN = 10 $\Leftrightarrow x = 20$.

Dễ dàng tính được BC = 20cm, AB = 27cm, AC = 33cm.

2. Tính số đo các góc

Ví dụ 1: Tính $\tan 15^0$ mà không dùng bảng số, không dùng máy tính.

Giải



Cách 1. Xét tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0, \widehat{B} = 15^0$, AC = 1(h.18). Đường trung trực của BC cắt AB ở I.

Ta có $\widehat{AIC} = 30^0$ nên IC = 2AC = 2,

$\dfrac{AC}{AI} = \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $AI = \sqrt{3}$.

Ta có: $AB = AI + BI = AI + IC = \sqrt{3} + 2$

$\tan 15^0 = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$,

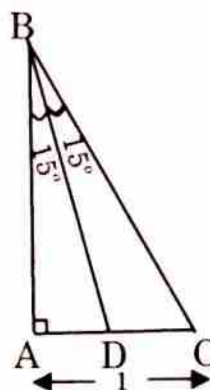
Cách 2. Xét tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0, \widehat{B} = 30^0$, AC = 1.

Ta có $\widehat{B} = 30^0$ nên AB = 2AC = 2, $\dfrac{AC}{AB} = \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $AB = \sqrt{3}$.

Kẻ đường phân giác BD.

Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}=\frac{AD+DC}{AB+BC}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}.$$



Ta có $\tan 15^0=\frac{AD}{AB}=2-\sqrt{3}.$

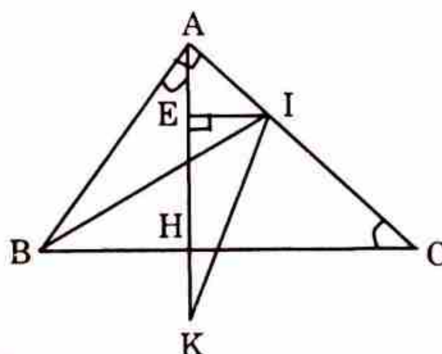
Cách 3. Xét tam giác ABC có $\hat{A}=90^0$, $\hat{C}=15^0, BC=4$.

Kẻ đường trung tuyến AM, đường cao AH.

Ta có $\widehat{AMB}=30^0, AM=2$ nên $AH=1$, $\frac{AH}{HM}=\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $HM=\sqrt{3}$.

Suy ra $HC=HM+MC=\sqrt{3}+2$. $\tan 15^0=\frac{AH}{HC}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

Ví dụ 2 : Tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C}=40^0$, đường cao AH, điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI=\frac{1}{3}AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK=\frac{1}{3}AH$. Tính số đo góc BIK.



Giải

Kẻ $IE\perp AH$. Ta có $AE=\frac{1}{3}AH=HK$

Nên $AH=EK$.

Ta có:

$BI^2=BA^2+AI^2=(AH^2+BH^2)+(AE^2)+(EI^2)$

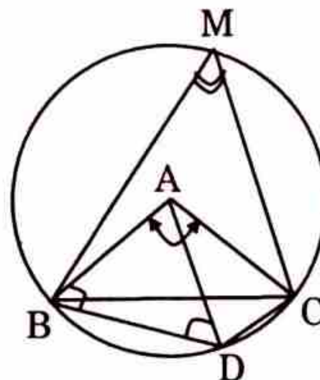
$=(AH^2+EI^2)+(BH^2+AE^2)=(EK^2+EI^2)+(BH^2+HK^2)=IK^2+BK^2$

Suy ra $\widehat{BKI}=90^0$.

Tứ giác ABKI là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BIK}=\widehat{BAH}=\hat{C}=40^0$

Ví dụ 3: Tam giác ABC cân có $\hat{A}=100^0$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC sao cho $\widehat{CBD}=15^0, \widehat{BCD}=35^0$. Tính số đo góc ADB.

Giải



Xét ΔBCD ta tính được $\hat{D}=130^0$. Vẽ đường tròn (A; AB), lấy M bất kì thuộc đường tròn đó (M và A cùng phía đối với BC). Do $\widehat{BAC}=100^0$ nên $\widehat{BMC}=50^0$. Do đó MBDC là tứ giác nội tiếp, tức là D thuộc đường tròn (A).

ΔABC cân tại A nên $\widehat{ADB}=\widehat{ABD}=40^0+15^0=55^0$.

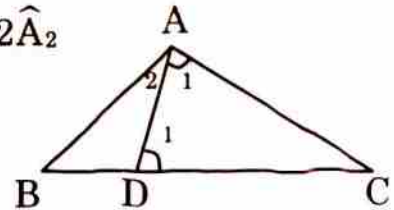
Ví dụ 4: Tam giác ABC có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ và độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

a. Tính độ dài các cạnh của tam giác.

b. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi để tính số đo của các góc A, B, C.

Giải

a. Trên cạnh CB lấy điểm D sao cho CD = CA.



Ta có: $\widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{D}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B} + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_2 = \widehat{B} + 2\widehat{A}_2$

Theo đề bài, $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$, suy ra $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$.

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{AB}$.

Đặt BC = a, AC = b AB = c với a, b, c $\in$ N, ta có $\dfrac{c}{a-b} = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a(a-b)$ (1).

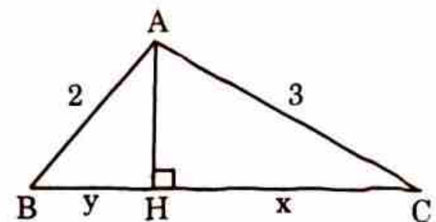
Do các cạnh của tam giác ABC là ba số tự nhiên liên tiếp và a > b nên $a - b = 1$ hoặc $a - b = 2$.

Nếu $a - b = 1$ thì $a - c = 2$, $(1) \Rightarrow c^2 = c + 2 \Leftrightarrow c(c-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c - 1 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow c = 2$. Khi đó a = 4, b = 3. Ba số 2, 3, và 4 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Nếu $a - b = 2$ thì $a - c = 1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow c^2 = 2(c+1) \Leftrightarrow c(c-2) = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = 3 \end{cases}$, loại.

Vậy AB = 2, AC = 3, BC = 4.



b. Kẻ AH $\perp$ BC.

Đặt HC = x, HB = y.

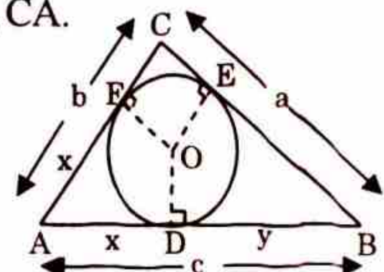
Ta có $x^2 - y^2 = (3^2 - AH^2) - (2^2 - AH^2) = 5$, nên $x - y = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

Từ đó $x = 2,625; y = 1,375; \cos C = \dfrac{x}{3} = 0,875; \widehat{C} = 28^0 57'$;

$\cos B = \dfrac{y}{2} = 6,875; \widehat{B} = 46^0 34'; \widehat{A} = 104^0 29'$.

Ví dụ 5. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D. Tính số đo góc C biết rằng AC.BC = 2AD.DB.

Giải



Gọi E, F là các tiếp điểm của đường tròn (O) trên CB, CA.

Ta có: AD = AF, BD = BE, CE = CF.

Đặt AD = AF = x, BD = BE = y.

Theo giả thiết ab = 2xy (1)

Ta có:

$AB + AC - BC = (x + y) + (x + CF) - (CE + y) = 2x$

nên $2x = b + c - a$. Tương tự $2y = a + c - b$

Suy ra $2x.2y = [c - (a - b)][c + (a - b)] = c^2 - (a - b)^2 = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra $2ab = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$ hay $a^2 + b^2 = c^2$. Theo định lí Pytago đảo, $\widehat{ACB} = 90^0$.

3. Tính độ dài các cung

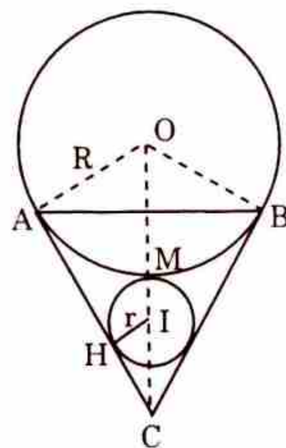
Ví dụ 1: Cho đường tròn tâm O, cung AB bằng 120^0. Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và tại B cắt nhau ở C. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CB và cung AB nói trên. So sánh độ dài của đường tròn (I) với độ dài cung AB của đường tròn (O).

Giải

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của đường tròn (O), (I). Gọi tiếp điểm của đường tròn (I) với cung AB và với cạnh CA theo thứ tự là M và H.

Δ OAC vuông tại A, $\widehat{AOC} = 60^0$ nên OC = 2OA = 2R.

Và $CM = OC - OM = 2R - R = R$ (1)



Δ IHC vuông tại H, $\widehat{HIC} = 60^0$ nên IC = 2IH = 2r.

Do có $MC = MI + IC = r = 2r = 3r$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $r = \dfrac{R}{3}$.

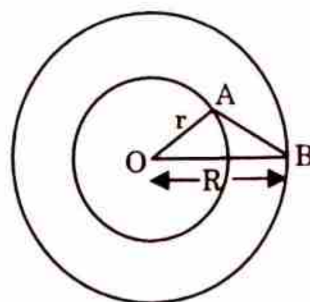
Độ dài cung AB của (O) bằng $\dfrac{2\pi R}{3}$.

Độ dài đường tròn (I) bằng $2\pi r = \dfrac{2\pi R}{3}$.

Vậy độ dài đường tròn (I) bằng độ dài cung AB của đường tròn (O).

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn đồng tâm. Biết khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm thuộc hai đường tròn bằng 1m. Tính hiệu các độ dài của hai đường tròn

Giải



Gọi A là điểm bất kì thuộc đường tròn (O; r), B là điểm bất kì thuộc đường tròn (O; R) với R > r.

Với mọi A và B ta có: $AB \geq OB - OA = R - r$

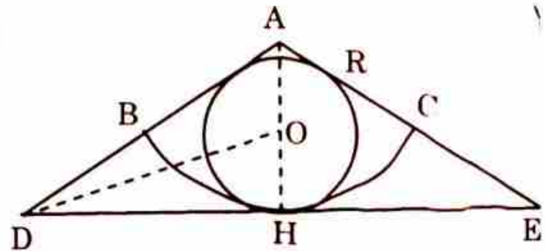
Vậy min $AB = R - r$.

Do đó $R - r = 1$.

Hiệu các độ dài của hai đường tròn bằng $2\pi(r + 1) - 2\pi r = 2\pi$(m).

Ví dụ 3: Cho hình quạt tròn có cung BC bằng 120^0, tâm A bán kính R. Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình quạt đó (đường tròn nội tiếp hình quạt là đường tròn tiếp xúc với cung BC và với các bán kính AB, AC).

Giải



Kẻ tiếp tuyến chung tại tiếp điểm H, cắt AB, AC ở D, E. đường tròn (O) nội tiếp hình quạt là đường tròn nội tiếp Δ ADE.

Ta tính được $AH = R$, $AD = 2R$, $DH = R\sqrt{3}$. Sau đó tính OH theo tính chất đường phân giác của Δ ADH, được $OH = R(2\sqrt{3} - 3)$.

Đáp số: $2(2\sqrt{3} - 3)\pi R$.

Ví dụ 4: Lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường tròn (O) sao cho sđ $\overset{\frown}{AB} = 60^0$, sđ $\overset{\frown}{BC} = 90^0$, sđ $\overset{\frown}{CD} = 120^0$.

a. Tứ giác ABCD là hình gì?

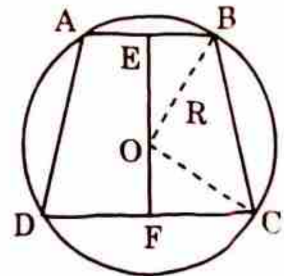
b. Tính độ dài đường tròn (O). Biết diện tích tứ giác ABCD bằng $100m^2$.

Giải

a. ABCD là hình thang cân.

b. Gọi R là bán kính của (O), EF là đường cao đi qua O của hình thang.

Ta có: $EF = \dfrac{2.100}{AB + CD} = \dfrac{200}{R(\sqrt{3} + 1)}$, (1)



$EF = OE + OF = \dfrac{R}{2}(\sqrt{3} + 1)$. (2)

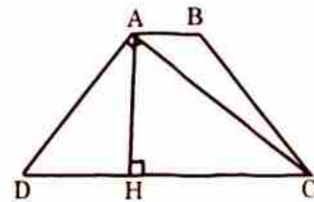
Từ (1) và (2) suy ra $R = \dfrac{20}{\sqrt{3} + 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$.

Đáp số: Độ dài đường tròn bằng $20(\sqrt{3} - 1)\pi$ m.

4.Tính diện tích các hình

Ví dụ1: Một hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính diện tích hình thang biết rằng đáy nhỏ dài 14cm, đáy lớn dài 50cm.

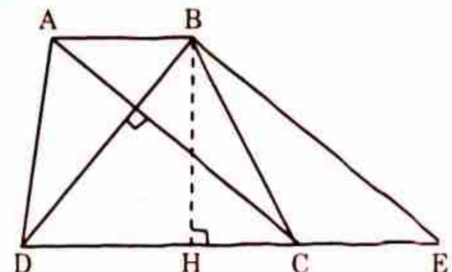
Giải



Kẻ $AH \perp CD$. Ta tính được HD = 18cm, HC = 32cm, AH = 24cm, AD = 30cm. Chu vi hình thang bằng 124cm, diện tích hình thang bằng $768cm^2$.

Ví dụ 2. Tính diện tích hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, BD = 15 cm.

Giải



Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E. Gọi BH là đường cao của hình thang.

Ta có BE // AC, $AC \perp BD$ nên $BE \perp BD$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông BDH, ta có:

$BH^2 + HD^2 = BD^2 \Rightarrow 12^2 + HD^2 = 15^2 \Rightarrow HD^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow HD = 9(cm)$.

Xét tam giác BDE vuông tại B

$BD^2 = DE.DH \Rightarrow 15^2 = DE.9 \Rightarrow DE = 225 : 9 = 25(cm)$.

Ta có AB = CE nên AB + CD = DE = 25 (cm).

Do đó $S_{ABCD} = 25.12 : 2 = 150(cm^2)$.

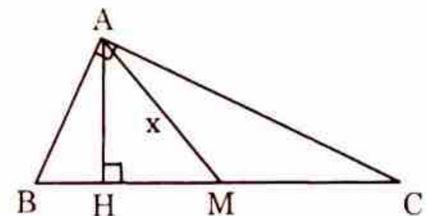
Ví dụ 3: Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7cm.

Giải

Đặt AM = x, ta có BC = 2x, AH = x − 7.

Theo hệ thức trong tam giác vuông $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2$ (1)

$AB.AC = BC.AH = 2x(x - 7)$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra:

$AB^2 + AC^2 + 2AB.AC = 4x^2 + 4x(x - 7)$.

$\Leftrightarrow (AB + AC)^2 = 8x^2 - 28x = 0$

$\Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x$

Đưa về phương trình $x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0$.

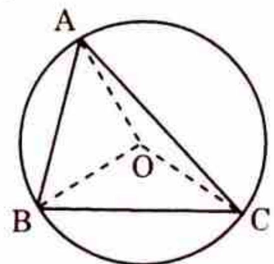
Nghiệm dương của phương trình là x = 16.

Từ đó BC = 32cm, AH = 9cm.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.32.9 = 144(cm^2)$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Độ dài các cung AB, BC, CA theo thứ tự bằng $3\pi, 4\pi, 5\pi$. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải



Gọi R là bán kính của đường tròn (O).

Ta có $2\pi R = 3\pi + 4\pi + 5\pi$ nên R = 6.

Số đo của các góc AOB, BOC, COA tỉ lệ với 3, 4, 5 nên

$$\frac{\widehat{AOB}}{3} = \frac{\widehat{BOC}}{4} = \frac{\widehat{COA}}{5} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA}}{3 + 4 + 5} = \frac{360^0}{12} = 30^0.$$

Suy ra $\widehat{AOB} = 90^0, \widehat{BOC} = 120^0, \widehat{COA} = 150^0$.

Ta có: $S_{AOB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.6.6 = 18$. Để chứng minh: nếu một tam giác có hai cạnh bằng a, b và góc tạo bởi hai cạnh này là góc tù α thì diện tích tam giác bằng $\frac{1}{2}ab\sin(180^0 - \alpha)$.

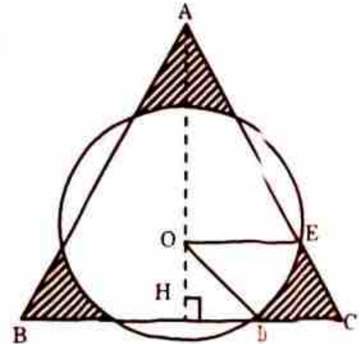
Do đó: $S_{BOC} = \frac{1}{2}R^2\sin 60^0 = \frac{1}{2}.6^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

$S_{COA} = \frac{1}{2}R^2\sin 30^0 = \frac{1}{2}.6^2.\frac{1}{2} = 9$. Vậy $S_{ABC} = 18 + 9\sqrt{3} + 9 = 27 + 9\sqrt{3}$.

Diện tích S của hình tròn bán kính R được tính theo công thức $S = \pi R^2$.

Ví dụ 5. Cho tam giác đều có tâm O, cạnh 3cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 1cm. Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.

Giải



Gọi AH là đường cao của tam giác đều ABC, ta có:

$AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}, OH = \frac{AH}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(cm)$.

Xét Δ OHD vuông tại H, ta có:

$HD^2 = OD^2 - OH^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow HD = \frac{1}{2}cm$.

Suy ra CD = 1cm. Tương tự CE = 1cm.

Tứ giác ODCE là hình thoi cạnh 1cm, $\widehat{DCE} = 60^0$.

Do đó: $S_{ODCE} = \frac{CD\sqrt{3}}{4}.2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(cm^2)$. Diện tích hình quạt ODE bằng $\frac{\pi.1^2}{6} = \frac{\pi}{6}(cm^2)$. Diện tích "tam giác cong" CED (phần gạch sọc giới hạn bởi các đoạn thẳng CD, CE và cung DE) bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)(cm^2)$

Diện tích phải tìm bằng: $\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi).3 = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - \pi)(cm^2)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao BN = BM. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và tam giác BEN.

Giải

Kẻ BI $\perp$ AC $\Rightarrow$ I là trung điểm AC.

Ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0 \Rightarrow \widehat{DBE} = 20^0$ (1); Δ ADB = Δ CEB (g–c–g)

$\Rightarrow$ BD = BE $\Rightarrow \Delta$ BDE cân tại B

$\Rightarrow$ I là trung điểm DE

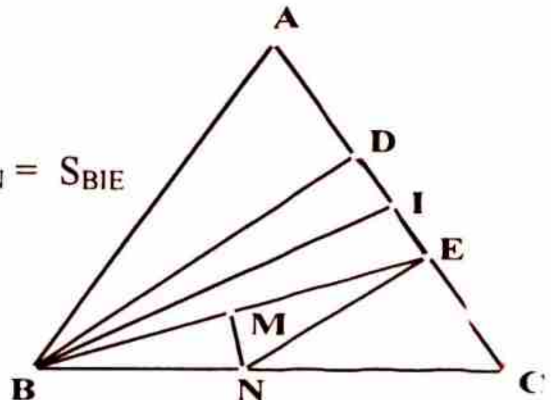
mà BM = BN và $\widehat{MBN} = 20^0$

$\Rightarrow \Delta$ BMN và Δ BDE đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BED}} = (\frac{BM}{BE})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{BNE} = 2S_{BMN} = S_{BIE}$

Vậy $S_{BCE} + S_{BNE} = S_{BCE} + S_{BIE} = S_{BIC}$

$= \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.



Ví dụ 7: Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB = 2R. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là OA, OB, AB. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc ba nửa đường tròn trên.

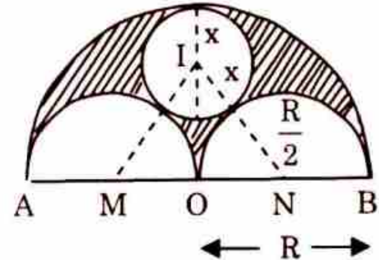
a. Tính bán kính của đường tròn (I).

b. Tính diện tích phần hình tròn lớn nằm ngoài hình tròn tâm I và nằm ngoài hai nửa hình tròn nhỏ.

Giải

a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của OA, OB. Gọi x là bán kính của (I).

Xét Δ ION vuông, ta có:



$IO^2 + ON^2 = IN^2$

$\Rightarrow (R - x)^2 + (\frac{R}{2})^2 = (\frac{R}{2} + x)^2$

$\Rightarrow R(R - 3x) = 0 \Rightarrow R = 3x \Rightarrow x = \frac{R}{3}$.

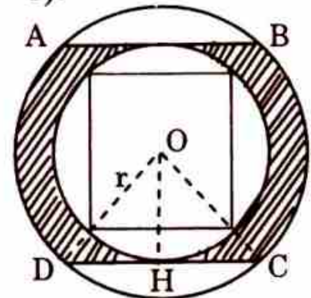
b. Đáp số: $\frac{5}{36}\pi R^2$.

Ví dụ 8: Cho hai đường tròn đồng tâm, đường tròn nhỏ chia hình tròn lớn thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng diện tích phần hình vành khăn giới hạn bởi hai tiếp tuyến song song của đường tròn nhỏ bằng diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ.

Giải

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của hai đường tròn (R > r).

Ta có $\pi R^2 = 2\pi r^2 \Rightarrow R = r\sqrt{2} \Rightarrow \Delta OHC$ vuông cân.



Diện tích hình vành khăn bằng $\frac{\pi R^2}{2}$.

Diện tích phần gạch sọc của hình vành khăn và diện tích hình vuông đều bằng R^2 (bạn đọc tự giải).

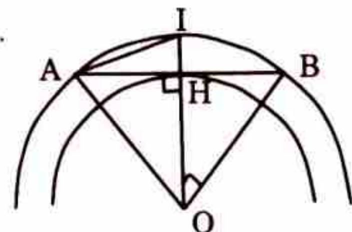
Ví dụ 9: Cho đa giác đều n cạnh độ dài mỗi cạnh bằng a. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác.

a. Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn.

b. Tính chiều rộng của hình vành khăn đó.

Giải

Gọi AB là cạnh của đa giác đều.



a. Diện tích hình vành khăn bằng $\frac{\pi a^2}{4}$.

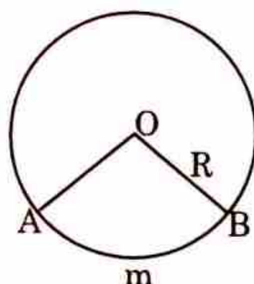
b. Chiều rộng hình vành khăn bằng:

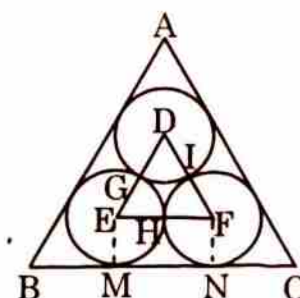
$$HI = AH.\tan\widehat{IAH}.$$

Đáp số: $\frac{a}{2}\tan\frac{90^0}{n}$.

Ví dụ 10: Một hình quạt có chu vi bằng 28cm và diện tích bằng 49cm (chu vi hình quạt bằng độ dài cung hình quạt cộng với hai lần bán kính). Tính bán kính của hình quạt.

Giải





Giả sử hình quạt đã cho có bán kính R, độ dài cung là m, diện tích S.

Ta có $\frac{mR}{2} = S = 49$ nên $mR = 98$. (1)

Ta lại có $m + 2R = 28$ nên $m = 28 - 2R$.

Thay vào (1) được $(28 - 2R).R = 98 \Rightarrow (R - 7)^2 = 0 \Rightarrow R = 7(cm)$.

Ví dụ 11: Cho ba đường tròn cùng có bán kính r và tiếp xúc ngoài đôi một.

a. Tính diện tích "tam giác cong" có đỉnh là các tiếp điểm của hai trong ba đường tròn đó.

b. Kẻ ba đường thẳng, mỗi đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn và không giao với đường tròn thứ ba. Tính diện tích tam giác tạo bởi ba đường thẳng đó.

Giải

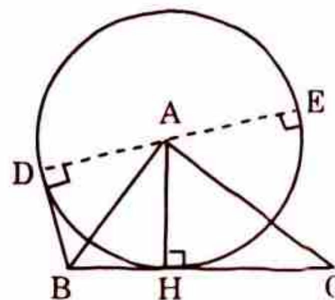
a. Diện tích tam giác cong GHI bằng hiệu của S_{DEF} (bằng $r^2\sqrt{3}$) và diện tích ba hình quạt bán kính r, số đo cung 60^0 (bằng $3.\frac{\pi r^2}{6}$).

b. Ta có $BM = NC = r\sqrt{3}; MN = 2r$ nên $BC = 2r(\sqrt{3} + 1)$

Đáp số: $S_{ABC} = 2r^2(2\sqrt{3} + 3)$.

Ví dụ 12: Cho tam giác ABC vuông tại A. AB = 15, AC = 20, đường cao AH. Vẽ Đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ các tiếp tuyến BD, CE với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BD, BC, CE và cung DE không chứa H của đường tròn.

Giải



Dễ thấy D, A, E thẳng hàng, lần lượt tính được BC = 25, BH = 9, HC = 16, AH = 12.

Từ đó tính được

$S_{ABC} = 150, S_{BDEC} = 300$.

Đáp số: $300 + 72\pi$.

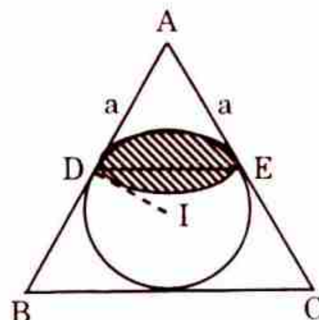
Ví dụ 13: Cho tam giác đều AB có cạnh bằng 2a. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Tính diện tích phần chung của hình tròn (I) và hình tròn tâm A bán kính a.

Giải

Diện tích S phải tìm (phần gạch sọc trên hình bên) bằng tổng diện tích của hai hình viên phân ($S = S_1 + S_2$).

Hình viên phân bán kính AD = AE = a, cung 60^0 có diện tích

$S_1 = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.



Hình viên phân bán kính

$ID = IE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, cung 120^0 có diện tích:

$S_2 = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Đáp số: $\frac{a^2}{18}(5\pi - 6\sqrt{3})$.

Ví dụ 14: Cho hình vuông ABCD cạnh a, vẽ đường tròn (c) đường kính AB, O là tâm đường tròn (c). Từ C vẽ tiếp tuyến CT với đường tròn (c) khác CB, gọi T là tiếp điểm, gọi E là giao điểm của AD và OT

a. Đặt DE = x tính theo a, x các cạnh của tam giác OAE, sau đó tính x theo a

b. Tính theo a diện tích tam giác OCE và đường cao EH xuất phát từ E của tam giác đó.

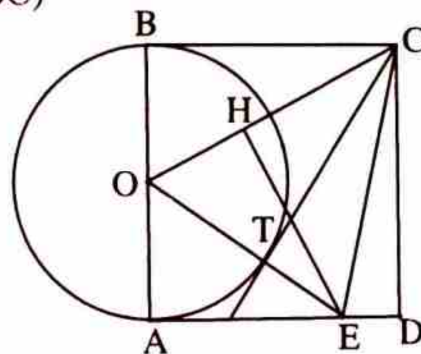
Giải

Cho hình vuông ABCD cạnh a, vẽ đường tròn (c) đường kính AB, O là tâm đường tròn (c). Từ C vẽ tiếp tuyến CT với đường tròn (c) khác CB, gọi T là tiếp điểm, gọi E là giao điểm của AD và OT

a. Đặt DE = x tính theo a, x các cạnh của tam giác OAE, sau đó tính x theo a

Ta có: $\Delta DCE = \Delta TCE$ (EC chung, CT = CD = BC)

$\Rightarrow ET = ED = x$.



$\Rightarrow OA = \frac{a}{2}; AE = a - x; OE = OT + TE = \frac{a}{2} + x$

Áp dụng định lí Pi-ta-go trong tam giác vuông AOE: $OE^2 = OA^2 + AE^2$

$\Leftrightarrow (\frac{a}{2} + x)^2 = (\frac{a}{2})^2 + (a - x)^2$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 + ax = \frac{a^2}{4} + a^2 + x^2 - 2ax \Leftrightarrow 3ax = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3} (a \neq 0)$

b. Tính theo a diện tích tam giác OCE và đường cao EH xuất phát từ E của tam giác đó.

$$S_{\Delta OCE} = \frac{CT.OE}{2} = \frac{a(\frac{a}{2} + x)}{2} = \frac{a(a + 2x)}{4} = \frac{a(a + \frac{2a}{3})}{4} = \frac{5a^2}{12} (\text{khi } x = \frac{a}{3})$$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông BOC:

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Leftrightarrow OC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{\Delta OCE} = \frac{EH.OC}{2} \Leftrightarrow EH = \frac{2S_{\Delta OCE}}{OC} = 2.\frac{5a^2}{12} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{3}$$

$$S_{\Delta OCE} = \frac{5a^2}{12}; EH = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Bài tập vận dụng

1. Tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính tanB : tanC.

2. Cho $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

3. Cho hình vuông ABCD. Tính $\cos\widehat{MAN}$ biết rằng M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, CD.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho BD = DE = EC. Biết AD 10cm, AE = 15cm. Tính độ dài BC.

5. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có AB = 8cm. AC = 15cm, đường cao AH = 5cm (điểm H nằm trên cạnh BC). Tính bán kính của đường tròn.

6. Cho đường tròn (O) có đường kính AB = 12cm. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) ở M và cắt tiếp tuyến của đường tròn tại B ở N. Gọi I là trung điểm của MN. Tính độ dài AM. Biết rằng AI = 13 cm.

7. Cho đường tròn tâm O bán kính R, các đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn Ở E, EA cắt CD ở K. Tính độ dài DK.

8. Các đường cao BH, CK của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp theo thứ tự ở D, E. Tính số đo góc A biết rằng DE là đường kính của đường tròn.

9. Tính số đo góc A của tam giác ABC biết rằng khoảng cách từ A đến trực tâm của tam giác bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác

10. Dùng bảng lượng giác hoặc máy tính bỏ túi. Hãy tính:

a. Chiều cao ứng với cạnh 40cm của một tam giác, biết góc kề với cạnh này bằng 40^0 và 50^0.

b. Góc tạo bởi đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh của tam giác, biết các góc ở hai đỉnh kia bằng 60^0 và 80^0.

11. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^0, \widehat{B} = 45^0$, BC = 4cm. Tính các độ dài AB, AC.

12. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, AB = 28cm, AC = 35cm. Tính độ dài BC.

13. Cho một hình vuông có cạnh 1dm. Người ta cắt đi ở mỗi góc của hình vuông một tam giác vuông cân để được một bát giác đều. Tính tổng diện tích của bốn tam giác vuông cân bị cắt đi.

14. Tam giác đều ABC có cạnh 60cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = 20cm. Đường trung trực của AD cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài các cạnh của tam giác DEF.

15. Cho tam giác ABC có AB = c, AC = b. Đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC Ở N. Tính tỉ số BN : NC.

16. Tính diện tích bát giác đều cạnh a.

17. Cho đa giác đều 20 cạnh $A_1A_2...A_{20}$ nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn. Tính tổng $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_{20}^2$.

18. Cho tam giác đều ABC và hình vuông ADEG cùng nội tiếp đường tròn (O; R). Tính diện tích phần chung của tam giác và hình vuông.

19. Cho đường tròn (O) , cung AB bằng 60^0. Vẽ cung OB có tâm A bán kính R. Vẽ cung OA có tâm B bán kính R. Chứng minh rằng diện tích hình giới hạn các cung OA, OB, AB nhỏ hơn diện tích hình tròn (O; R)

20. Cho trường tròn (O; R). Một đường tròn (O') cắt đường tròn (O) ở A và B sao cho cung AB của đường tròn (O') chia hình tròn (O) thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng độ dài cung AB của đường tròn (O') lớn hơn 2R.

21. Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi S_1 là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác. S_2 là diện tích hình tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng: $2S < S_1 + S_2$.

22. Cho hình viên phân BC có dây BC = a, cung $\overset{\frown}{BC} = 90^0$.

a. Tính diện tích hình viên phân.

b. Tính diện tích hình vuông DEGH nội tiếp trong viên phân đó (D và E thuộc BC, G và H thuộc cung BC).

23. Tính bán kính của hình viên phân BC có dây BC = 6cm, cạnh của hình vuông MNPQ nội tiếp viên phân ấy bằng 2cm (M và N thuộc BC, P và Q thuộc cung BC).

24. Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác, AB = 14 cm, BC = 18 cm, CD = 26 cm. Gọi H là tiếp điểm của CD và đường tròn (O). Tính các độ dài HC, HD.

25. Một hình thang cân nội tiếp đường tròn tâm O, cạnh bên được nhìn từ O dưới góc 120^0. Tính diện tích hình thang, biết đường cao của hình thang bằng h.

26. Cho hình thang ABCD (AB // CD), AB = a, CD = b, a < b. Một đường tròn (O) đi qua A và B, cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N. Tính độ dài MN theo a, b, biết rằng các tứ giác ABNM và CDMN có diện tích bằng nhau.

27. Cho hai đường tròn (O; 3cm), và (O_1; 6cm) tiếp xúc ngoài nhau tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d tại B và C. Một đường tròn (O_2) nhỏ hơn hai đường tròn trên tiếp xúc với cả hai đường tròn ấy và tiếp xúc với đường thẳng d.

a. Tìm bán kính của đường tròn (O_2).

b. Tìm diện tích hình giới hạn bởi ba đường tròn (O), (O_1), (O_2) và đường thẳng d.

28. Cho nửa đường tròn tâm B đường kính AC = 4a. Dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB nằm trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn nói trên. Từ C kẻ dây CD tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại E và cắt tiếp tuyến A của nửa đường tròn (O) tại I.

a. Chứng minh: AD song song với OE.

b. Chứng minh rằng hai tam giác AIC và EOC đồng dạng. Tính giá trị của tích AI. EC.

c. Chứng minh rằng hai tam giác AEC và EBC đồng dạng và tính tỉ số đồng dạng của chúng

d. Tìm diện tích của hình giới hạn bởi đoạn thẳng BC, cung EB và tiếp tuyến CE.

29. Cho đường tròn (O; 5,0cm) và một điểm A nằm trên đường tròn ấy. Trên tia tiếp tuyến Ax, lấy một điểm B sao cho AB = 5,0 cm. Đường tròn (B; 5,0cm) cắt đường tròn (O; 5,0cm) tại điểm thứ hai C.

a. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn (O; 5,0cm).

b. Tứ giác OABC là hình gì? Tại sao?

c. Tính diện tích hình giới hạn bởi hai cung lớn AC của hai đường tròn đã cho.

d. Từ B kẻ cát tuyến bất kì cắt đường tròn (O; 5,0cm) tại E và F. Chứng minh: BE.BF không đổi.

30. Cho tam giác ABC, $\widehat{B} = \frac{5\widehat{C}}{13} = \frac{5\widehat{A}}{18}$. Đường tròn (O) đi qua AC sao cho cung AC có số đo bằng 90^0 và O, B nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC. Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn tại điểm thứ hai Q và cắt đường thẳng chứa đường kính IC tại M.

a. Tam giác ABC là tam giác gì?

b. Tam giác AIC là tam giác gì?

c. Chứng minh rằng đường phân giác của góc BCI cũng là đường phân giác của góc ACQ.

d. Đường thẳng BC cắt đường tròn tại điểm thứ hai E. Chứng minh rằng hai tam giác AEC và MIA đồng dạng.

e. Cho AC = b. Tính diện tích hình viên phân tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC.

31. Một tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD = 6,0cm. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng BD và AC. Trên tia IC lấy điểm N sao cho IN = IB; đường thẳng BN cắt đường tròn tại điểm thứ hai M.

a. Tính độ dài cạnh của tam giác đều ABC.

b. Các tam giác BIN và BMD là tam giác gì?

c. Chứng minh hệ thức: NC. NA = MN . NB.

d. Tính tổng diện tích ba hình viên phân giới hạn bởi đường tròn (O) và tam giác đều ABC.

32. Cho một hình chữ nhật ABCD, AB = b, BC = $b\sqrt{2}$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC và BD theo thứ tự tại M và N.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng BD và BN.

b. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

c. Chứng minh rằng tứ giác DNMC nội tiếp được trong một đường tròn.

d. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác DNMC.

33. Cho 5 điểm thẳng hàng sắp xếp theo thứ tự A, B, C, D, E, và AB = BC = CD = DE = a. Dây MN của đường tròn (C; AC) vuông góc với AD tại D; AM cắt đường tròn (B; AB) tại K.

a. Chứng minh rằng DK là tiếp tuyến của đường tròn (B; AB).

b. Các tam giác DKM và AMN là tam giác gì? Từ đó suy ra DK // AN.

c. Chứng minh rằng Tứ giác KMDC nội tiếp được trong một đường tròn

d. Tìm diện tích hình giới hạn bởi ba đường tròn (C; AC), (B; AB) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác KMDC.

34. Cho tam giác vuông ABC, $\widehat{A} = 1v$ và AD là đường cao thuộc cạnh huyền. Tia phân giác của góc BAD cắt BC tại M. Vẽ đường tròn đường kính AM.

a. Tam giác ACM là tam giác gì?

b. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AM cắt cạnh AB tại điểm thứ hai N và đi qua D.

c. Tứ giác ACMN là hình gì?

d. Cho AC $\approx$ 20,0cm; $\hat{C} \approx 30^0$.Tính diện tích hình tròn đường kính AM.

35. Cho hình thang cân ABCD, hai đáy là AB = 5cm và CD = 7cm, $\hat{C} = 60^0$, hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại O.

a. Chứng minh: Hai tam giác OAD và OBC bằng nhau.

b. Tính độ dài các cạnh AD, BC và các đường chéo AC, BD.

c. Tính diện tích hình tròn ngoai tiếp hình thang ABCD.

36. Hai tiếp tuyến MA và MB của đường tròn (O; R) tạo thành 1 góc 120^0 (A và B là các tiếp điểm).

a. Tam giác MAB là tam giác gì? Tính các cạnh của tam giác ấy theo R.

b. Tính diện tích phần hình tròn nằm trong tam giác MAB.

c*. Từ một điểm N trên cung nhỏ AB kẻ ND, NE, NF theo thứ tự vuông góc với AB, MB, MA ($D \in AB$, $E \in MB$, $F \in MA$).

Chứng minh: $ND^2 = NE.NF$.

37. Cho đường tròn tâm O, bán kính R = 5cm. Vẽ một dây AC có độ dài 6cm và đường kính BD vuông góc với dây AC tại E.

a. Tính độ dài các đoạn BE và DE.

b. Tính chu vi tứ giác ABCD.

c. Tính độ dài FG của đường thẳng song song với AC kẻ từ O và cắt AD tại F, CD tại G.

38. Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R, cắt nhau tại A và B. Đoạn nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự ở C và D. Tính R biết rằng AB = 24cm, CD = 12cm.

39. Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R. cắt nhau tại A và B, trong đó $\widehat{OAO'} = 90^0$. Vẽ cát tuyến chung MAN, M thuộc (O), N thuộc (O'). Tính $AM^2 + AN^2$ theo R.

40. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 có cùng bán kính và cùng đi qua một điểm I. Gọi các giao điểm khác I của hai trong ba đường tròn đó là A, B, C. Chứng minh rằng :

a. $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$.

b. I là trực tâm của tam giác ABC.

41. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AO. Gọi CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. $C \in (O)$. $D \in (A)$. Đoạn nối tâm OA cái đường tròn (O) ở H. Chứng minh rằng DH là tiếp tuyến của đường tròn (O).

42. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ hình bình hành OBO'C. Chứng minh rằng ACOO' là hình thang cân.

43. Hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$.

a. Cho R = 3cm, r = lcm. Tính các độ dài AB, AC.

b. Cho AB = 19,2cm, AC = 14,4cm. Tính R và r.

44. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) tiếp xúc với hai cạnh của một góc nhọn và (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2), (O_2) tiếp xúc ngoài với (O_3) Biết bán kính của các đường tròn (O_1) và (O_3) là a và b. Tính bán kính của đường tròn (O_2).

45. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi AB là đường kính của đường tròn (O). AC là đường kính của đường tròn (O'). DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. $D \in (O)$, $E \in (O')$, K là giao điểm của BD và CE.

a. Tứ giác ADKE là hình gì? Vì sao?

b. CMR: AK là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

c. Gọi M là trung điểm của BC. CMR: MK vuông góc với DE.

46. Hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài lại A. Gọi BC, DE là các tiếp tuyến chung của hai đường tròn (B và D thuộc đường tròn tâm O).

a. Chứng minh rằng BDEC là hình thang cân.

b. Tính diện tích hình thang cân đó.

47. Hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài nhau. Gọi AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. $A \in (O)$, $B \in (O')$.

a. Tính độ dài AB.

b. Cho R = 36cm, r = 9cm. Tính bán kính của đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng AB và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O').

48. Trong một hình thang cân có hai đường tròn tiếp xúc ngoài nhau, mỗi đường tròn tiếp xúc với hai cạnh bên và tiếp xúc với một đáy của hình thang. Biết bán kính của các đường tròn đó bằng 2cm và 8cm. Tính diện tích hình thang.

49. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại M, N.

a. Chứng minh rằng ba điểm M, O. N thẳng hàng.

b. Tính bán kính của đường tròn (O') theo R.

50. Cho tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC. Tính bán kính của đường tròn (O') theo R.

51. Cho đường tròn (O) đường kính AB. đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Các dây BC, BD của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') theo thứ tự tại E, F. Gọi I là giao điểm của EF và AB. Chứng minh rằng I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

52. Cho ba đường tròn bán kính r tiếp xúc ngoài đôi một. Tính bán kính của đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn đó.

53. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ về một phía của đường kính AB các tia tiếp tuyến Am, Bn. Gọi (I), (K) là các đường tròn tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc ngoài đường tròn (O), trong đó đường tròn (I) tiếp xúc với tia Am, đường tròn (K) tiếp xúc với tia Bn. Gọi x và y là bán kính của các đường tròn (I) và (K). Chứng minh rằng $R = 2\sqrt{xy}$.

54. Cho nửa đường tròn tâm O với đường kính AB. Gọi OC là bán kính vuông góc với AB, d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với nửa đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường kính AB. Chứng minh rằng điểm I cách đều đường thẳng d và điểm O.

55. Cho nửa đường tròn tâm O với đường kính AB = 2R. Gọi OE là bán kính vuông góc với AB. Vẽ đường tròn (C) có đường kính OE. Gọi (D) là đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn (C), tiếp xúc trong với đường tròn (O) và tiếp xúc với đoạn thẳng OB. Tính bán kính của đường tròn (D).

56. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB, AC = 4cm, CB = 8cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AC, AB. Tính bán kính của đường tròn (I) tiếp xúc với các nửa đường tròn trên và tiếp xúc với đoạn thẳng AB.

57. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 6cm, BC = 10cm. Tính bán kính của đường tròn (O') tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

58. Cho hai đường tròn làm O bán kính 9cm và tâm O' bán kính 3cm tiếp xúc ngoài nhau. Một đường thẳng bị hai đường tròn đó cắt thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Tính độ dài của một đoạn thẳng đó.

59. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau, OO' = 65cm. Gọi AB là tiếp tuyến chung ngoài. CD là tiếp tuyến chung trong, A và C thuộc (O), B và D thuộc (O'). Tính bán kính của các đường tròn (O) và (O'). Biết rằng AB = 63cm, CD = 25cm.

60. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AF và tiếp tuyến chung trong EM (A, E $\in$ (O), B, D $\in$ (O')).

a. Gọi M là giao điểm của AB và EF. Chứng minh rằng Δ AOM và Δ BMO' đồng dạng.

b. Chứng minh rằng AE vuông góc với BF.

c*. Gọi N là giao điểm của AE và BF. Chứng minh rằng ba điểm O, N, O' thẳng hàng.

61. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Qua O, kẻ các tia tiếp tuyến với đường tròn (O'), chúng cắt đường tròn (O) tại A và B. Qua O', kẻ các tia tiếp tuyến với đường tròn (O), chúng cắt đường tròn (O') ở C và D. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

62. Cho hai đường tròn đồng tâm O, có bán kính R và r (R > r). Dây BC của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại D và E. Gọi EA là đường kính của đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng $DA^2 + DB^2 + DC^2 = 2(R^2 + r^2)$

63. Hai dây AB, CD song song với nhau của đường tròn (O) là tiếp tuyến của đường tròn (O'), AB = 10cm, CD = 24cm. Biết đường kính của đường tròn (O') bằng 7cm, tính bán kính của đường tròn (O).

64. Tính bán kính của đường tròn (O), biết rằng dây AB của đường tròn có độ dài bằng 2a và khoảng cách từ điểm chính giữa của cung AB đến dây AB bằng h.

65. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2cm, dây CD song song với AB ($C \in \overset{\frown}{AD}$). Tính độ dài các cạnh của hình thang ABDC biết chu vi hình thang bằng 5cm.

66. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính 20cm. C là điểm chính giữa c nửa đường tròn. Điểm H thuộc bán kính OA sao cho OH = 6 cm . Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn ở D. Vẽ dây AE song song với DC. Gọi K là hình chiếu của E trên AB. Tính diện tích tam giác AEK.

67. Cho tam giác đều ABC có diện tích S, nội tiếp đường tròn (O). Trên các cung AB, BC, CA, lấy theo thứ tự các điểm A', B', C' sao cho các cung $\overset{\frown}{AA'}, \overset{\frown}{BB'}, \overset{\frown}{CC'}$ đều có số đo bằng 30^0. Tính diện tích phần chung của hai tam giác ABC và A'B'C'.

Hướng dẫn và đáp số

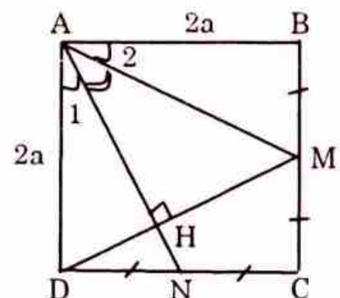
1. Vẽ đường cao AH. Do AM = AC nên $CH = HM = \frac{MC}{2}$.

Do đó $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{AH}{BH} : \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH} = \frac{1}{3}$.

2. Chia cả tử và mẫu của $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ cho $\sin\alpha \neq 0$, ta được:

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1} = \frac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha + 1} = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

3. Gọi H là giao điểm của NA và DM.



Dễ dàng chứng minh được:

$\Delta AND = \Delta ABM$ (c.g.c) nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$,

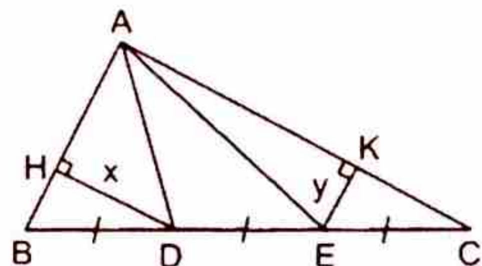
suy ra $AH \perp DM$, $\cos\widehat{MAN} = \frac{AH}{AM}$.

Đặt AB = AD = 2a. Ta tính được $AM = AN = a\sqrt{5}$.

Từ $AD^2 = AH.AN$, ta tính được $AH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$ do đó

$\cos\widehat{MAN} = \frac{AH}{AM} = \frac{4a}{\sqrt{5}} : (a\sqrt{5}) = \frac{4}{5}$.

4. Kẻ DH // AC, EK // AB.



Đặt DH = x, EK = y thì AC = 3x, AK = 2x, AB = 3y, AH = 2y.

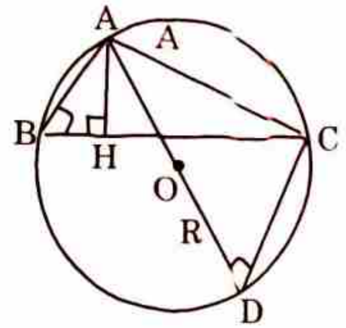
Xét ΔAHD vuông tại H: $x^2 + 4y^2 = 100$.

Xét ΔAEK vuông tại K: $4x^2 + y^2 = 225$.

Suy ra $5(x^2 + y^2) = 325$. Từ đó $x^2 + y^2 = 65$.

Chú ý rằng BH = y, ta tính được $BD = \sqrt{65}$, nên $BC = 3\sqrt{65}$ cm.

5. Kẻ đường kính AD.



Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung), $\widehat{ACD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vậy $\Delta AHB \sim \Delta ACD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \dfrac{5}{15} = \dfrac{8}{2R} \Rightarrow R = 12(cm)$

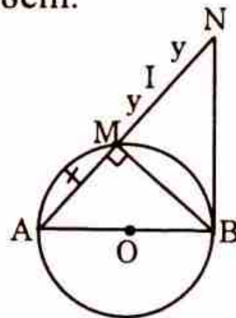
Bán kính của đường tròn (O) bằng 12cm.

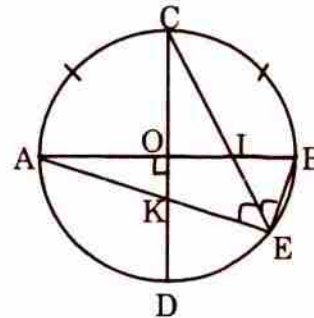
Chú ý: Nếu điểm H nằm ngoài cạnh BC, ta vẫn có R = 12 cm

6. Đặt AM = x, MI = IN = y (0 < x, y < 13).

Từ x + y = 13 và $x(x + 2y) = 12^2$, ta tính được x = 18 (loại), x = 8.

Đáp số: AM = 8cm.



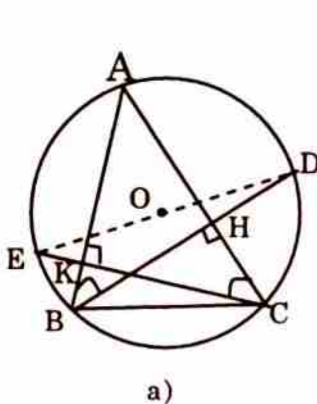


7. ΔAEB có EI là đường phân giác nên $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{IA}{IB} = 3$.

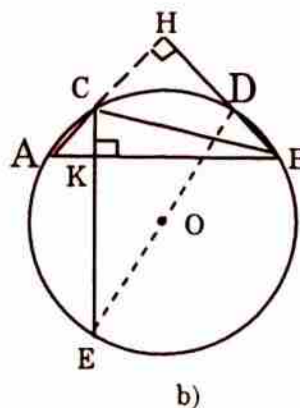
$\Delta AOK \sim \Delta AEB$(g.g) nên $\dfrac{OA}{OK} = \dfrac{EA}{EB} = 3$. Do đó $OK = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{R}{3}$.

Vậy $DK = \dfrac{2}{3}R$.

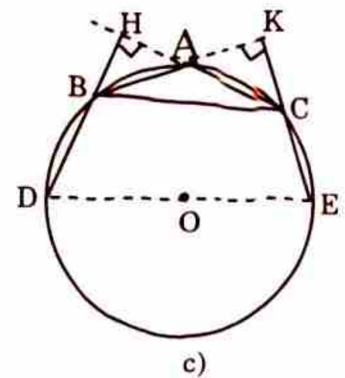
8. Nếu $\widehat{BAC} < 90^0$ thì H thuộc tia AC (hình a,b)



a)



b)



c)

$\widehat{ABH} = \widehat{ACK}$.

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE}$. Ta lại có sđ $\overset{\frown}{AD}$ + sđ $\overset{\frown}{AE} = 180^0$ nên sđ $\overset{\frown}{AD}$ = sđ $\overset{\frown}{AE} = 9)^0$, do đó $\widehat{ABH} = 45^0$, $\widehat{BAH} = 45^0$. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BAH} = 45^0$.

Nếu $\widehat{BAC} > 90^0$ thì H thuộc tia đối của tia AB (hình c). Bạn đọc tự chứng minh rằng khi đó sđ $\overset{\frown}{AD}$ = sđ $\overset{\frown}{AE} = 90^0$, $\widehat{ABH} = 45^0$, $\widehat{BAH} = 45^0$. Do đó $\widehat{BAC} = 180^0 - \widehat{BAH} = 135^0$

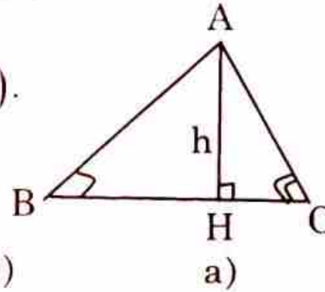
9. Có hai đáp số: $\widehat{A} = 60^0$ hoặc $\widehat{A} = 120^0$.

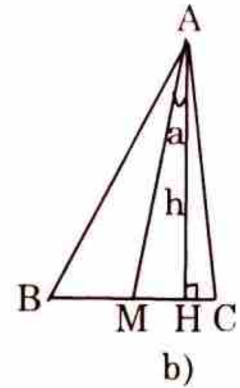
10. a. BH = h.cotB, CH = h.cotC

$\Rightarrow BC = BH + CH = h(\cot B + \cot C)$.

$h = \dfrac{40}{\cot 40^0 + \cot 55^0}$

$\approx \dfrac{40}{1,1918 + 0,7002} \approx \dfrac{40}{1,892} \approx 21(\text{cm})$





b. Đặt $\widehat{MAH} = \alpha$. Ta có BH = hcotB, CH = hcotC, $MH = h\tan\alpha$,

$BH - CH = (BM + MH) - (CM - MH) = 2MH$

$\Rightarrow h\cot B = h\cot C = 2h\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\cot B - \cot C}{2} = (0,5774 - 0,1763) : 2 = 0,2006$

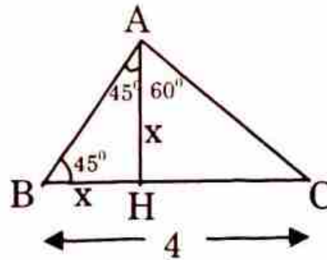
$\Rightarrow \alpha \approx 11^0 21'$.

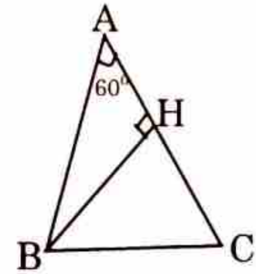
11. Kẻ $AH \perp BC$.

Đặt AH = BH = x.

Ta có:

$HC = AH.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$





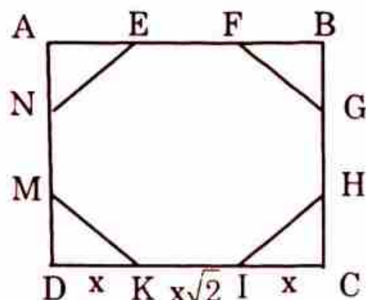
Do BH + HC = BC nên $x + x\sqrt{3} = 4$, suy ra $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}+1} = 2(\sqrt{3}-1)$cm.

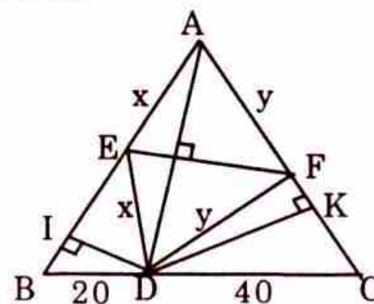
Từ đó $AB = x\sqrt{2} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$cm, $AC = 2x = 4(\sqrt{3} - 1)$cm.

12. Kẻ $BH \perp AC$. Ta có AH = 14cm, $BH = AB.\sin 60^0 = 28.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$.

$HC = 21$, $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 588 + 441 = 1029$. Từ đó $BC = 7\sqrt{21}$ cm.

13. Đặt DK = IC = x thì $KI = MK = x\sqrt{2}$. Từ DK + KI + IC = DC suy ra $x(2 + \sqrt{2}) = 1$, do đó $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$. Tổng diện tích của bốn tam giác vuông cân bị cắt đi bằng: $2x^2 = 2.\dfrac{1}{6 + 4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}(\text{dm}^2)$



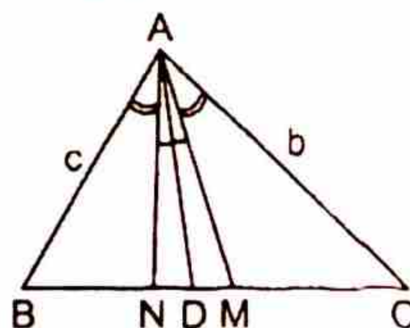


14. Đặt DE = AE = x, DF = AF = y. Kẻ $DI \perp AB$, $DK \perp AC$. Ta tính được $BI = 10, DI = 10\sqrt{3}$, từ đó áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔDIE vuông ta tính được x = 28.

Bằng cách tương tự, ta tính được y = 35. Biết AE = 28, AF = 35 và $\widehat{EAF} = 60^0$, ta tính được $EF = 7\sqrt{21}$.

15. Ta có: $\widehat{DAN} = \widehat{DAM}$, $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}$ theo ví dụ 6 ta có:

$\frac{BN}{MC} = S_{ABN} : S_{AMC} = \frac{c.AN}{b.AM}$; (1) $\frac{BM}{NC} = S_{ABM} : S_{ANC} = \frac{c.AM}{b.AN}$. (2)



Nhân từng vế (1) với (2): $\frac{BN}{MC} \cdot \frac{BM}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Do BM = MC nên $\frac{BN}{NC} = \frac{c^2}{b^2}$.

16. Đáp số: $2a^2(\sqrt{2} + 1)$.

17. Lần lượt tính:

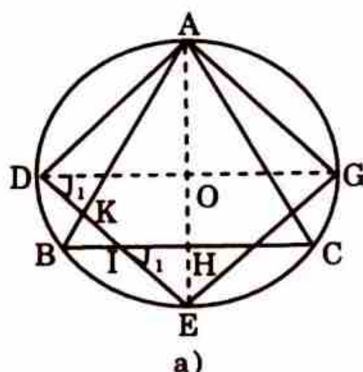
$MA_1^2 + MA_{11}^2 = 4R^2, MA_2^2 + MA_{12}^2 = 4R^2, ... MA_{10}^2 + MA_{20}^2 = 4R^2$

Đáp số: $40R^2$

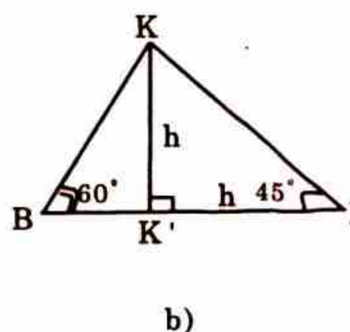
18. (hình a). Gọi H, I là giao điểm của OE, DE với BC.

Ta có: $OH = HE = \frac{R}{2}, \hat{I}_1 = \hat{D}_1 = 45^0$

Nên $IH = HE = \frac{R}{2}, BI = BH - IH = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$



a)



b)

Trước hết tính diện tích ΔKBI (hình b).

Gọi đường cao KK' = h. Ta có $BK' + K'I = BI$ nên $\frac{h}{\sqrt{3}} + h = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Từ đó tính được $h = \frac{R\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1)^2, S_{KBI} = \frac{R^2}{8}(9 - 5\sqrt{3})$, cuối cùng diện tích phải tìm bằng: $S_{ABC} - 2S_{KBI} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{4}(9 - 5\sqrt{3}) = \frac{R^2}{4}(8\sqrt{3} - 9)$.

19. Gọi S là diện tích hình giới hạn bởi các cung OA, OB, AB. Diện tích này bằng hiệu của ba lần diện tích hình quạt 60^0 bán kính R và hai lần diện tích tam giác đều AOB. Ta tính được $S = \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

Hãy chứng minh $\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) > 0$.

20. Cung AB của (O') chia hình tròn (O) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 bằng nhau như hình vẽ. Kẻ đường kính AOC. Ta thấy:

- Đường kính AOC cắt cung AB của (O') tại một điểm D khác A và B (vì nếu đường kính AC chỉ cắt cung AB đó tại A hoặc cắt cung AB đó tại A và B thì $S_1 \neq S_2$).

- Điểm O thuộc đoạn thẳng AD, vì nếu trái lại thì qua O có thể kẻ được một đường kính không cắt (O') dẫn tới $S_1 < S_2$. Kí hiệu *l* là độ dài cung, ta có $l_{\overset{\frown}{AB}} = l_{\overset{\frown}{AD}} + l_{\overset{\frown}{DB}} > AO + OD + DB > AO + OB = 2R$.

21. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC. Ta có: $2S = (a + b + c)r$, mà $a + b + c < 6R$ nên $2S < 6Rr$. (1).

Mặt khác $S_1 + S_2 \geq 2\sqrt{S_1S_2} = 2\sqrt{\pi R^2.\pi r^2} = 2\pi Rr > 6Rr$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S < S_1 + S_2$. (2)

22. Gọi A là tâm của đường chứa cung BC.

Ta có BC = a nên $AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Ta tính được diện tích của viên phân bằng $S = \frac{a^2}{8}(\pi - 2)$.

b. Gọi DEGH là hình vuông nội tiếp viên phân, gọi x là cạnh của hình vuông. Kẻ $AI \perp BC$, cắt GH ở K.Xét ΔAKG vuông ta có:

$AK^2 + KG^2 = AG^2$

$\Rightarrow (\frac{a}{2} + x)^2 + (\frac{x}{2})^2 = (\frac{a}{\sqrt{2}})^2$

(chú ý AG = AC)

Rút gọn được $5x^2 + 4ax - a^2 = 0$. Vậy $x = \frac{a}{5}$.

23. Gọi O là tâm của đường tròn chứa cung BC, MNPQ là hình vuông nội tiếp viên phân. Dễ thấy BM = MN = NC = 2(cm). Do đó ΔBMQ vuông cân, $\widehat{B} = 45^0$.

ΔQMC vuông nên $QC^2 = QM^2 + MC^2 = 4 + 16 = 20$, suy ra

$QC = 2\sqrt{5}$. Góc nội tiếp $\widehat{B} = 45^0$ nên góc góc ở tâm $\widehat{COQ} = 90^0$.

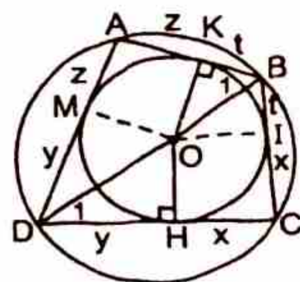
ΔCOQ vuông cân nên $OC = \dfrac{QC}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$(cm).

24. Gọi I, K, M là tiếp điểm của đường tròn (O) trên BC, AB, AD, r là bán kính của đường tròn (O).

Đặt CH = CI = x, DH = DM = y, BI = BK = t, AK = AM = z. Ta tính được AD = 22cm.

ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 90^0$, từ đó $\widehat{B}_1 = \widehat{HOD}$.

Ta có $\Delta EBO \sim \Delta HOD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{t}{r} = \dfrac{r}{y} \Rightarrow r^2 = yt$.



Tương tự $r^2 = xz$. Suy ra $xz = yt$.

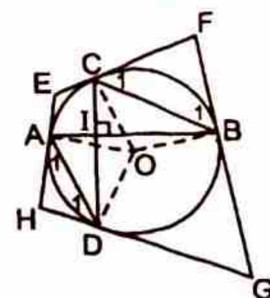
Do đo $\dfrac{x}{y} = \dfrac{t}{z} = \dfrac{18 - x}{22 - y}$.

Từ đó ta được $11x = 9y$. Ta lại có $x + y = 26$.

Ta tính được $x = 11{,}7$ và $y = 14{,}3$.

Đáp số HC = 11,7cm, HD = 14,3cm.

25.

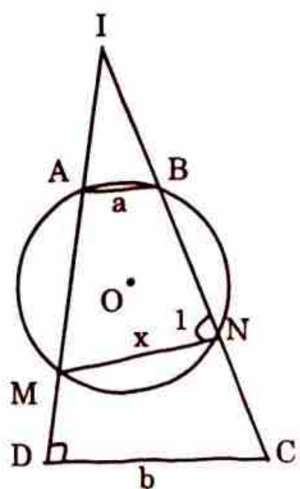


$\widehat{AOD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{ACD} = 60^0$.

ΔAHC có $HC = h\cot 60^0 = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$

Do HC bằng đường trung bình của hình thang nên diện tích hình thang bằng $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$.

26. Gọi I là giao điểm của AD và BC.



Đặt MN = x > 0. Ta có $\widehat{N}_1 = \widehat{D}$ (cùng bằng $\widehat{IAB}$)

$\Delta IAB \sim \Delta INM(g.g) \Rightarrow \dfrac{S_{IAB}}{S_{INM}} = (\dfrac{a}{x})^2$

$\Delta IDC \sim \Delta INM(g.g) \Rightarrow \dfrac{S_{IDC}}{S_{INM}} = (\dfrac{b}{x})^2$

Đặt S là diện tích mỗi tứ giác ABNM, CDMN.

Ta có:

$\dfrac{a^2 + b^2}{x^2} = \dfrac{S_{IAB} + S_{ICD}}{S_{INM}} = \dfrac{(S_{INM} - S) + (S_{INM} + S)}{S_{INM}} = 2$. Suy ra $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

27. a. Gọi r là bán kính đường tròn (O_2). E là tiếp điểm của tiếp tuyến d với đường tròn này. Từ O_2 kẻ đường thẳng song song với d nó cắt OB và O_1C theo thứ tự tại B' và C'.

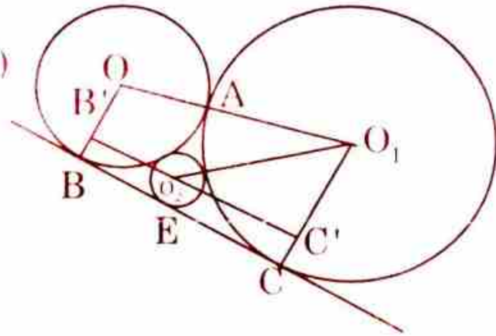
Vậy $EC = O_2C' = \sqrt{(6+r)^2 - (6-r)^2} = \sqrt{24r} = 2\sqrt{6r}$,

$EB = O_2B' = \sqrt{(3+r)^2 - (3-r)^2} = \sqrt{12r} = 2\sqrt{3r}$

nên $BC = B'C' = 2(\sqrt{6r} + \sqrt{3r}) = 2\sqrt{r}(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ (1)

Dễ dàng chứng minh được

$BC = \sqrt{(6+3)^2 - (6-3)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra:

$\sqrt{r} = \dfrac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

$\Rightarrow r = \dfrac{18}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2} \approx 1(cm)$

b. Diện tích hình giới hạn bởi 3 đường tròn trên và đường thẳng d là hiệu giữa diện tích của tứ giác BOO_1C với tổng diện tích hai quạt tròn và diện tích đường tròn (O_2). Vì BOO_1C là hình thang vuông (vì $OB \perp d$, $O_1C \perp d \Rightarrow OB \,//\, O_1C$ và $\hat{B} = 1v$)

$S_{BOO_1C} = \dfrac{OB + O_1C}{2}.BC = \dfrac{3+6}{2}.6\sqrt{2} = 27\sqrt{2}(cm^2) \approx 38,2$

$S_{q(OAB)} = \dfrac{\pi.3^2.109^0 30'}{360^0} = 8,59(cm^2); S_{q(O_1AC)} = \dfrac{\pi.6^2.70^0 30'}{360^0} = 22,1(cm^2)$.

(Dễ dàng tính được $\sin\hat{O}_1 = \dfrac{6\sqrt{2}}{9} = 0,9427 \Rightarrow \hat{O}_1 = 70^0 30'$ mà

$\hat{O}_1 + \hat{O} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{O} = 180^0 - \hat{O}_1 = 180^0 - 70^0 30' = 109^0 30'$)

$S_{(O_2)} = \pi r^2 \approx 3,14.\dfrac{6}{3+2\sqrt{2}} \approx 3,14(cm^2) \approx 3,1(cm^2)$.

Vậy $S \approx 38,2 - (8,59 + 22,1) + 3,14 \approx 4,2(cm^2)$.

28. a. $OE \perp CI$ vì CI là tiếp tuyến của đường tròn (O), E là tiếp điểm.

$AD \perp CI$ (vì $\widehat{ADC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra AD // OE.

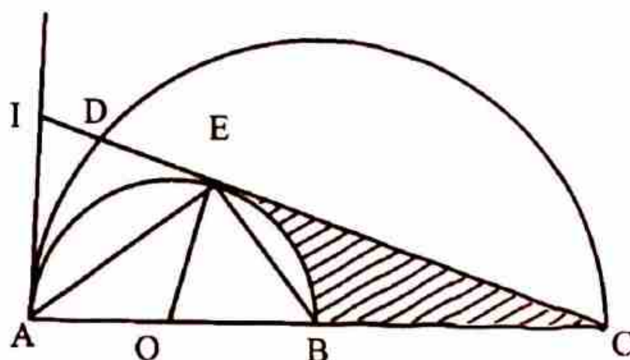
b. Hai tam giác vuông OEC và AIC có góc nhọn C chung, vậy $\Delta\, OEC \sim \Delta\, IAC$,

suy ra $\dfrac{OE}{IA} = \dfrac{EC}{AC} \Rightarrow AI.EC = OE.AC = a.4a = 4a^2$.

c. $\Delta\, AEC \sim \Delta\, EBC$ ($\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{C}$ chung) tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{EC}{AC}$ mà

$EC = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = a\sqrt{8}$ nên $k = \dfrac{a\sqrt{8}}{4a} = \dfrac{\sqrt{8}}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d. Diện tích hình phải tìm là hiệu diện tích giữa tam giác vuông OEC và diện tích quạt tròn OEB.



$\sin\hat{C} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \approx 0,3334$

$\Rightarrow \hat{C} = 19^0 30' \Rightarrow \widehat{EOB} = 70^0 30'$

$S_{\Delta OEC} = \frac{a\sqrt{8}.a}{2} = \frac{a^2\sqrt{8}}{2} = a^2\sqrt{2}$

$S_{q(OEB)} = \frac{\pi.a^2.70^0 30'}{360^0} = \frac{4,7\pi a^2}{24}$.

$S = S_{\Delta OEC} - S_{q(OEB)} = a^2\sqrt{2} - \frac{4,7\pi a^2}{24} = \frac{a^2}{24}(24\sqrt{2} - 4,7\pi)$

29. a. $\Delta AOB = \Delta CBO$ (c.c.c) ($AB = BC$, $AO = OC$, OB chung), suy ra $\hat{A} = \hat{C} = 1v$ hay $BC \perp OC$ điểm C nằm trên đường tròn.

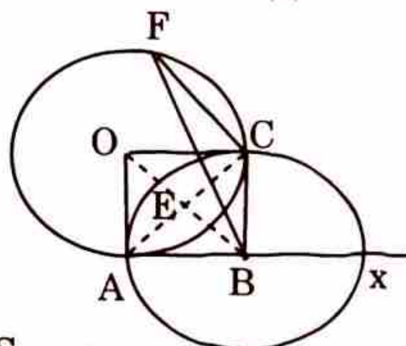
Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b. Ta có $OA = OC = AB = 5cm$, và $\hat{C} = 1v$, vậy OABC là hình vuông (hình thoi có 1 góc vuông).

c. Diện tích hình giới hạn bởi hai đường tròn (O) và (B) là tổng diện tích hai hình tròn đi hai lần diện tích hình viên phân AEC.

$S_{(O)} = \pi.r^2$ mà $S_{(O)} = S_{(B)}$ (vì bán kính của chúng bằng nhau) nên $S_{(B)} = \pi.r^2$.

Diện tích hình viên phân AEC là:



$S_{(AEC)} = S_{q(OAC)} - S_{OAC}$

$S_{q(OAC)} = \frac{\pi r^2.90^0}{360^0} = \frac{\pi r^2}{4}, S_{\Delta OAC} = \frac{r^2}{2}$.

$S_{(AEC)} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$.

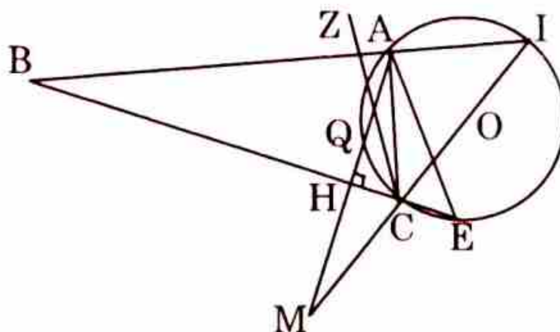
Vậy diện tích hình phải tìm là: $S = S_{(O)} + S_{(B)} - 2S_{(AEC)}$;

$S = 2\pi r^2 - 2(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}) = 2\pi r^2 - \frac{2\pi r^2}{4} + \frac{2r^2}{2}$; $S = \frac{6\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4}(6\pi + 2)$.

d. $\Delta BEC \sim \Delta BCF$ ($\hat{B}$ chung, $\hat{F} = \widehat{ECB}$ (góc nội tiếp và góc giữa một tia tiếp tuyến và một dây đi qua tiếp điểm cùng chắn cung EC)), suy ra $\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow BF = BC^2 = 5^2 = 25$. Vậy tích BE.BF không đổi.

30. a. $\hat{B} = \frac{5\hat{C}}{13} = \frac{5\hat{A}}{18} \Rightarrow \frac{5\hat{B}}{5} = \frac{5\hat{C}}{13} = \frac{5\hat{A}}{18}$. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{5\hat{B}}{5} = \frac{5\hat{C}}{13} = \frac{5\hat{A}}{18} = \frac{5\hat{B} + 5\hat{C} + 5\hat{A}}{5+3+18} = \frac{5(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})}{36} = \frac{5.180^0}{36^0} = 25^0$

$\Rightarrow \hat{A} = 90^0, \hat{B} = 25^0, \hat{C} = 65^0$. Vậy ΔABC là tam giác vuông tại A.



b. ΔAIC, $\widehat{A} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\hat{I} = 45^0$ (góc nội tiếp chắn cung AC).

$\Rightarrow \Delta AIC$ tam giác vuông cân

c. Ta có: $\widehat{BCQ} + \widehat{QCA} + \widehat{ACI} = \widehat{BCI}$;

$\widehat{BCQ} + \widehat{CQH} = 1v, \widehat{ACI} + \widehat{AIC} = 1v$.

Suy ra $\widehat{AIC} = \widehat{CQH}; \widehat{BCQ} = \widehat{ACI}$.

Giả sử CZ là phân giác của góc $\widehat{BCI}$, vậy $\widehat{BCZ} = \widehat{ZCI}$ mà $\widehat{BCQ} = \widehat{ACI}$, trừ vế với vế của hai đẳng thức này ta có:

$$\widehat{BCZ} - \widehat{BCQ} = \widehat{ZCI} - \widehat{ACI}; \widehat{QCZ} = \widehat{ZCA}$$

Vậy CZ cũng là phân giá của góc ACQ.

d. ΔACE và ΔMIA có $\hat{E} = \hat{I}$ (góc nội tiếp chắn cùng một cung)

$\widehat{ACE} = 180^0 - 65^0 = 115^0$

$\widehat{IAM} = 90^0 + \widehat{CAH} = 90^0 + (90^0 - 65^0) = 90^0 + 25^0 = 115^0$

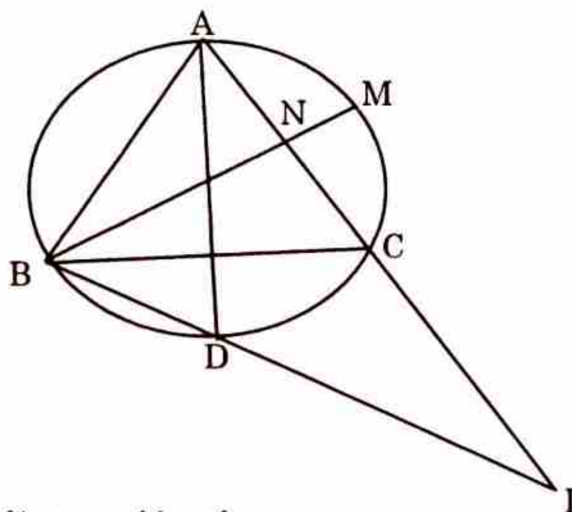
Suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{IAM}$. Vậy $\Delta ACE \sim \Delta MIA$.

e. Gọi diện tích hình viên phân tạo bởi cung nhỏ AC và dây AC là S, thì

$S = S_{q(OAC)} - S_{\Delta OAC}; S_{q(OAC)} = \dfrac{\pi.OC^2.90^0}{360^0} = \dfrac{\pi.OC^2}{4}$, mà $OC = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$

$S_{q(OAC)} = \dfrac{\pi(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}{4} = \dfrac{\pi.b^2}{8}; S_{\Delta OAC} = (\dfrac{b}{\sqrt{2}}.\dfrac{b}{\sqrt{2}}):2 = \dfrac{b^2}{4}; S = \dfrac{\pi b^2}{8} - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{b^2}{8}(\pi - 2)$

31. a. $AB = AC = BC = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$



b. $IB = IN \Rightarrow \Delta BIN$ là tam giác cân.

$\hat{I} = \dfrac{sd\widehat{AC} - sd\widehat{DC}}{2}$ (góc I là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn) mà $sd\widehat{AB} = 120^0, sd\widehat{DC} = 60^0 \Rightarrow \hat{I} = 30^0$.

Vậy $\widehat{MBD} = \widehat{BNI} = \dfrac{180^0 - 30^0}{2} = 75^0$.

ΔBMD có $\widehat{M} = \dfrac{sd\widehat{BD}}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$.

$\widehat{MBD} = 75^0 \Rightarrow \widehat{MDB} = 75^0$, vậy BMD là tam giác cân.

c. $\Delta NAB \sim \Delta NMC$ ($\hat{B} = \hat{C}; \widehat{A} = \widehat{M}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung))

$\Rightarrow \dfrac{NA}{NM} = \dfrac{NB}{NC}$ và NA.NC = NM.NB.

d. Diện tích ba hình viên phân giới hạn bởi đường tròn (O) và ΔABC là hiệu diện tích giữa hình tròn (O) và diện tích ΔABC.

$S_{(O)} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{(S\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$ (vì ΔABC đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$ và dễ dàng chứng minh được đường cao của nó là $R\sqrt{3}(\sqrt{3} : 4)$

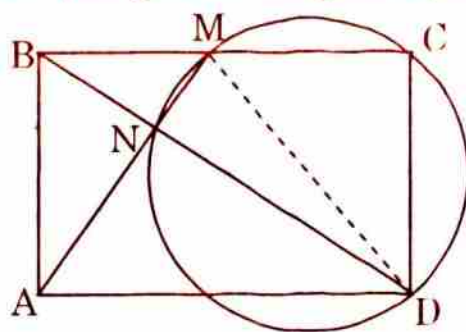
Do đó $S = \pi.R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2}{4}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 9(4\pi - 3\sqrt{3})(cm^2)$

32. a. Ta có $BD^2 = BC^2 + CD^2 = (b\sqrt{2})^2 + b^2 = 3b^2 \Leftrightarrow BD = b\sqrt{3}$

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$AB^2 = BN.BD \Rightarrow BN = \dfrac{AB^2}{BD} = \dfrac{b^2}{b\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$

b. Hai tam giác vuông RNM và BCD có $\widehat{M} = \widehat{D}$ (hai góc có cùng một phần phụ là $\widehat{MBN}$), suy ra $\Delta BNM \sim \Delta BCD$



$\Rightarrow \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{BM}{BD}$.

Thay bằng số ta có:

$\dfrac{\frac{b}{\sqrt{3}}}{b\sqrt{2}} = \dfrac{BM}{b\sqrt{3}} \Rightarrow BM = \dfrac{b^2}{b\sqrt{2}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$

Mà $BC = b\sqrt{2}$, điểm M nằm trên tia BC. Vậy M là trung điểm của BC.

c. $\widehat{N} = 1v, \widehat{C} = 1v \Rightarrow \widehat{N} + \widehat{C} = 2v$ nên DNMC là tứ giác nội tiếp.

d. DM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DNMC. Dễ dàng chứng minh được MA = MD.

Trong tam giác vuông ABM: $AM^2 = BM^2 + AB^2 = \left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + b^2 = \dfrac{3b^2}{2}$

$AM = \dfrac{b\sqrt{6}}{2} \Rightarrow MD = \dfrac{b\sqrt{6}}{2}$. Vậy bán kính của đường tròn là $R = \dfrac{b\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích của hình tròn ngoại tiếp tứ giác DNMC là:

$S = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi(\dfrac{b\sqrt{6}}{4})^2 \Rightarrow S = \dfrac{6b^2}{16}\pi = \dfrac{3b^2}{8}\pi$.

33. a. Trong tam giác vuông MDC, CD = a, CM = 2a (vì điểm M nằm trên đường tròn (C; CA) hay (C; 2a)) $\cos\widehat{MCD} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, $\widehat{MCD} = 60^0$

ΔACM là tam giác cân (CA = CM) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{M} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$

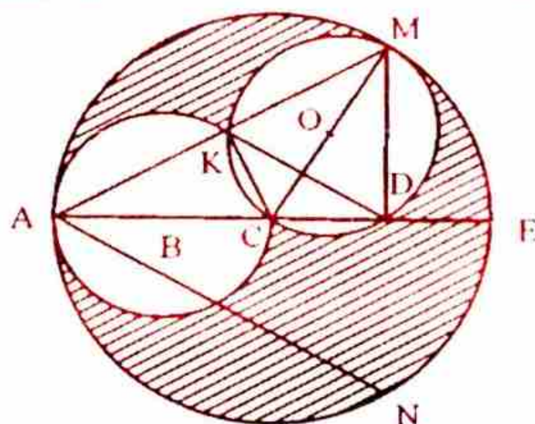
Trong tam giác vuông AKC, $\widehat{A} = 30^0 \Rightarrow KC = \frac{CA}{2}$ hay KC = BC, mà BC = CD = a nên BKD là tam giác vuông tại K hay BK ⊥ DK nên DK là tiếp tuyến của đường tròn (B; AB).

b. Δ ACM là tam giác cân (chứng minh trên) mà CK ⊥ AM ⇒ KA = KM. Trong tam giác vuông DAM, DK là trung tuyến ⇒ KD = KM và $\widehat{M} = 60^0$ (vì $\widehat{M} + \widehat{A} = 90^0$). Vậy DKM là tam giác đều.

Dây cung MN ⊥ AE nên DM = DN ⇒ AM = AN mà $\widehat{A} = 60^0$ ⇔ AMN là tam giác đều. KM = KA (chứng minh trên) và DM = DN = KD là đường trung bình của Δ AMN ⇒ DK // AN.

c. Học sinh tự chứng minh.

d. Diện tích hình phải tìm là phần gạch sọc trên hình bằng diện tích hình tròn (C; 2a) cộng với diện tích hai hình viên phân do hình tròn (B; a) và hình tròn ngoại tiếp tứ giác KMDC gọi là đường tròn (O; a) (hình tròn này cũng có bán kính là a) trừ hai lần diện tích hình tròn (B; a).



$S_{(C)} = 4\pi a^2; S_{(O)} = \pi a^2$. Hình viên phân do hai cung AC của hai đường tròn (B; O) và (O; a). Hai hình viên phân này đều bằng nhau (vì bán kính hai đường tròn bằng nhau và hai cung bằng nhau).

$S_{q(KBC)} = \frac{\pi a^2.60}{360} = \frac{\pi.a^2}{6} (\widehat{KBC} = 60^0)$; $S_{\Delta KBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, nên $S_{vp} = \frac{\pi.a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $S = 4\pi a^2 + 2(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}) - 2.\pi a^2 = 4\pi a^2 + \frac{\pi.a^2}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{6}(14\pi - 3\sqrt{3})$

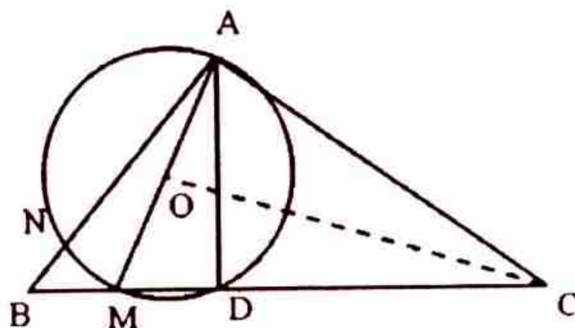
34. a. $\widehat{B}$ và $\widehat{CAD}$ cùng có phần phụ là $\widehat{C}$ nên $\widehat{B} = \widehat{CAD}$, $\widehat{AMC} = \widehat{B} + \widehat{BAM}$ (góc ngoài tại đỉnh M của Δ ABM).

$\widehat{MAC} = \widehat{CAD} + \widehat{MAD}$ mà $\widehat{BAM} = \widehat{MAD}$ (giả thiết) suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{MAC}$.

Vậy Δ ACM là tam giác cân.

b. Vì $\widehat{ADM} = 60^0$ nên D nằm trên (O). Vì AM là tia phân giác nên nó nằm giữa các tia AB, AD.

Suy ra M nằm giữa B, D hay trên đường thẳng MD, B nằm ngoài dây MD. Vậy B nằm ngoài (O) mà $\widehat{BAM} < 90^0$ nên BA không tiếp xúc với (O). Suy ra BA cắt (O) tại điểm thứ hai N.

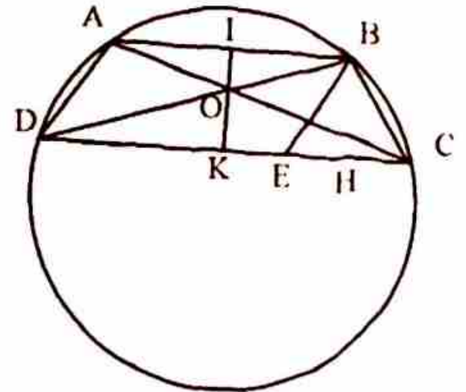


c. $\widehat{MNA} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $MN \perp AB$, $\widehat{BAC} = 1v$ hay $AC \perp AB \Rightarrow MN // AC$ suy ra tứ giác ACMN là hình thang vuông.

d. Gọi O là tâm đường tròn đường kính AM, Δ ACM là tam giác cân đỉnh C, nên $CO \perp AM$ và CO là đường phân giác của $\widehat{C}$, vậy $\widehat{ACO} = \frac{30^0}{2} = 15^0$.

Trong tam giác vuông AOC thì

$OA = AC\sin\widehat{ACO}$, $OA = 12\sin 15^0$. Vậy diện tích hình tròn (O) là:



$S_{(O)} = \pi.OA^2 = \pi.(12\sin 15^0)^2 = 144\pi\sin^2 15^0$

$\approx 31,65(cm^2) = 31,7(cm^2)$.

35. a. Do hình thang có trục đối xứng là đường thẳng IK (I, K lần lượt là trung điểm của AB, DC) ta có AC đối xứng với BD và giao điểm O nằm trên trục đối xứng IK.

Vậy Δ OAD đối xứng với Δ OBC qua IK, và bằng nhau.

b. Từ B kẻ BE // AD (E nằm trên cạnh DC). Ta có tứ giác ABED là hình bình hành nên AB = DE = 5cm, AD = AE mà AD = BC $\Rightarrow$ BE = BC mà $\widehat{C} = 60^0 \Rightarrow \Delta$ EBC là tam giác đều, nên $EC = 7 - 5 = 2(cm)$.

Do đó AD = BD = 2(cm). Kẻ đường cao BH của Δ EBC, HE = HC = 1cm nên DH = 5 + 1 = 6 (cm), $BH = \sqrt{3}$ (cm).

Áp dụng định lí Pitago vào Δ BDH: $DB^2 = DH^2 + BH^2$

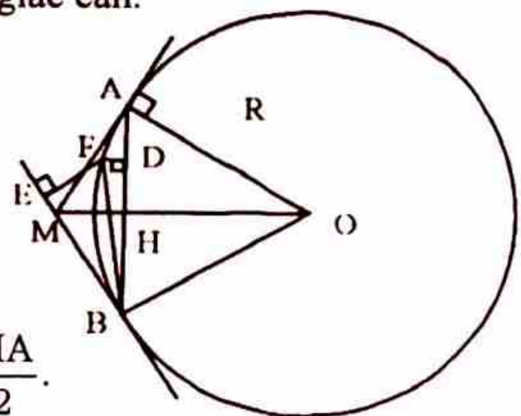
$\Rightarrow DB^2 = 6^2 + (\sqrt{3})^2 = 39, DB = \sqrt{39} \approx 6,2(cm)$ nên AC = 6,25cm.

c. Ta biết $\widehat{D} = 60^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = 120^0$. Đường chéo AC trương cung 120^0, vậy DAC là tam giác đều nội tiếp đường tròn. Nếu gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang ABCD là: $S = \pi.(\frac{6,25}{\sqrt{3}})^2 \approx 40,8(cm^2) \approx 41(cm^2)$

36. a. MA = MB (định lí) vậy Δ MAB là tam giác cân.

Ta có $OA \perp MA$ và $OB \perp MB$ (định lí)

Tứ giác MAOB có:



$\widehat{A} = 90^0, \widehat{B} = 90^0, \widehat{M} = 120^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{O}$ (nhỏ) $= 60^0$, dây AB trương cung bằng 60^0 nên AB = R.

MO cắt AB tại H, $HA = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}, MH = \frac{MA}{2}$.

ABC

Vì $\widehat{MAH} = 30^0$ (trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30^0 bằng nửa cạnh huyền). Đặt MA = x ta có: $x^2 - (\frac{x}{2})^2 = (\frac{R}{2})^2 \Rightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{R^2}{4}$

$\Rightarrow 3x^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Vậy $MA = MB = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

b. Phần hình tròn nằm trong ΔMAB chính là hình viên phân tạo bởi cung AB và dây cung AB.

$S = S_{q(OAB)} - S_{\Delta OAB}; S_{q(OAB)} = \frac{\pi R^2.60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$

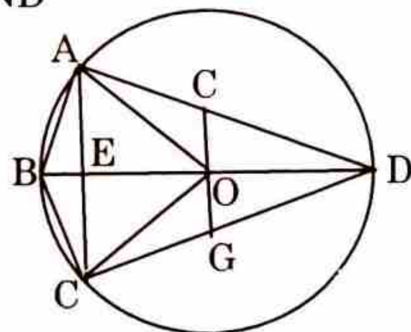
$S_{\Delta ABC} = \frac{R^3\sqrt{3}}{4}$, nên $S = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$

c. Hai tam giác vuông AND và BNE có $\widehat{NAD} = \widehat{MBN}$ nên $\Delta AND \sim \Delta BNE$;

$\frac{ND}{NE} = \frac{AN}{BN}$, $\Delta BND \sim \Delta ANF$ (vì hai tam giác vuông có $\widehat{NBD} = \widehat{NAF}$)

suy ra: $\frac{AN}{BN} = \frac{NF}{ND}$. Từ (1) và (2) suy ra $\frac{ND}{NE} = \frac{NF}{ND}$

$\Rightarrow ND^2 = NE.NF$



37. a. Đặt BE = x thế thì DE = 2R – x

Trong Δ vuông BAD ta có:

$AE^2 = x(2R - x)$

$\Rightarrow 9 = x(2R - x)$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0.$

Từ đó được BE = 1 và ED = 9.

b. Trong Δ vuông ABD ta có $AB^2 = 2R.BE = 10$ và $AB = BC = \sqrt{10}$

$AD^2 = 2R.ED = 10.9$ và $AD = CD = 3\sqrt{10}.$

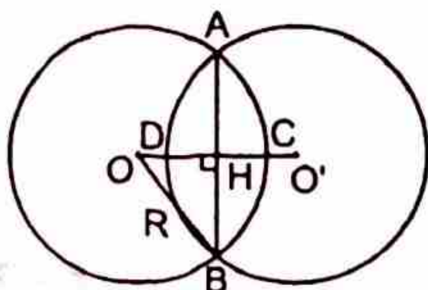
Nên chu vi ABCD $= 2(\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) = 8\sqrt{10}$

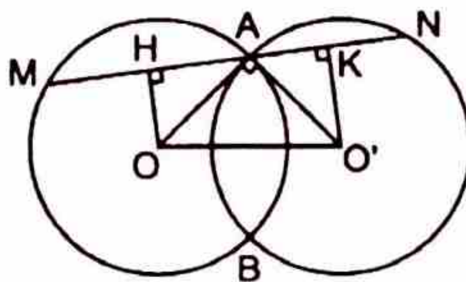
c. $\Delta ACD \sim \Delta FGD$ nên $\frac{FG}{AC} = \frac{R}{ED} \Rightarrow GF = \frac{6.5}{9} = 3\frac{1}{3}$ cm.

38. Gọi H là giao điểm của AB và CD. ΔOHB vuông nên

$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow R^2 = (R - 6)^2 + 12^2 \Rightarrow R = 15(cm).$

39. Kẻ OH và O'K vuông góc với MN. Ta có $\Delta AOH = \Delta O'AK$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên OH = AK. Đáp số $AM^2 + AN^2 = 4R^2$.





40. a. Các tứ giác O_1BO_3I, O_3IO_2A là hình thoi

$\Rightarrow O_1B // IO_3, O_1B = IO_3, IO_3 // O_2A,$

$IO_3 = O_2A \Rightarrow O_1B // O_2A, O_1B = O_2A$

$\Rightarrow O_1BAO_2$ là hình bình hành

$\Rightarrow AB = O_1O_2, AB // O_1O_2.$

Chứng minh tương tự $BC = O_2O_3, CA = O_3O_1$.

Vậy $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$ (c.c.c).

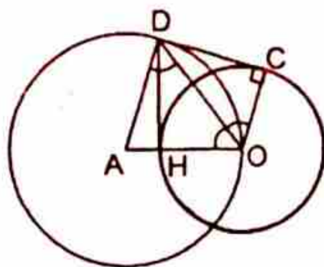
b. Ta có $AI \perp O_2O_3$ mà $O_2O_3 // BC$ nên $AI \perp BC$.

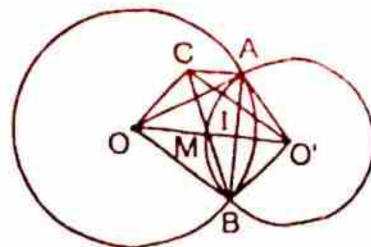
Chứng minh tương tự $BI \perp AC$.

Vậy I là trực tâm của ΔABC.

41. Ta có $\widehat{AOD} = \widehat{COD}$ (cùng bằng $\widehat{ADO}$) nên $\Delta OHD = \Delta OCD$ (c.g.c). Từ đó $\widehat{OHD} = \widehat{OCD} = 90^0$. Suy ra DH là tiếp tuyến của đường tròn (O).

42. OO' cắt AB, BC theo thứ tự ở I, M. Ta có IM là đường trung bình của ΔABC nên IM // AC. Ta lại có OA = O'C (cùng bằng OB). Do đó ACOO' là hình thang cân.





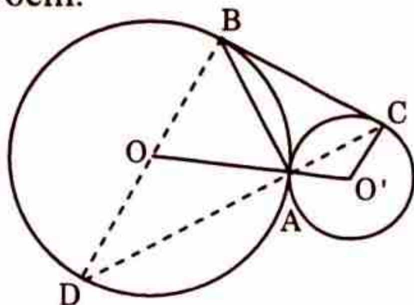
43. a. Trước hết tính BC, được $2\sqrt{3}$ cm. Kẻ đường kính BOD thì C, A, D thẳng hàng. Tính BA theo công thức $\frac{1}{BA^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BC^2}$ được BA = 3cm.

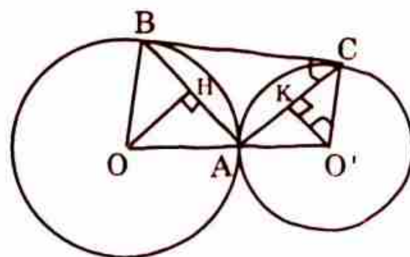
Từ đó $AC = \sqrt{3}$cm.

b. Dễ dàng tính được BC = 24cm. Vẽ $O'K \perp AC$, ta có:

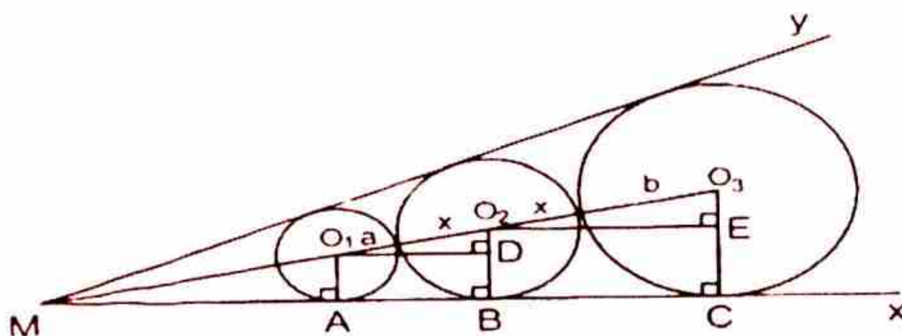
$\Delta O'KC \sim \Delta CAB$ (g.g). Suy ra $\frac{O'C}{CB} = \frac{KC}{AB} \Rightarrow \frac{r}{24} = \frac{7,2}{19,2} \Rightarrow r = 9$cm.

Tương tự R =16cm.

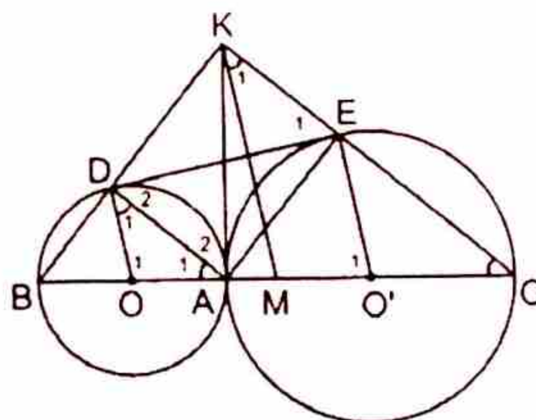




44. Gọi x là bán kính của đường tròn (O_2). Kí hiệu như trên hình vẽ. Từ các tam giác đồng dạng ta có: $\frac{x-a}{x+a} = \frac{b-x}{x+b}$. Từ đó $x = \sqrt{ab}$.



45. a. Theo tính chất góc ngoài của tam giác: $\widehat{O}_1 = 2\widehat{B}, \widehat{O'}_1 = 2\widehat{C}$, mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O'}_1 = 180^0$ nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$, suy ra $\widehat{K} = 90^0$. Ta lại có $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ nên tứ giác ADKE là hình chữ nhật.



b. $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 90^0$ nên $KA \perp BC$.

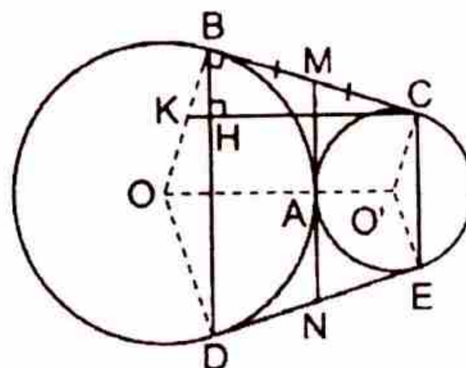
Vậy AK là tiếp tuyến chung của (O) và (O').

c. $\widehat{K}_1 + \widehat{E}_1 = \widehat{C} + \widehat{EKA} = 90^0$ nên $MK \perp DE$.

46. a. Do tính đối xứng nên $BD \perp OO'$, $CE \perp OO' \Rightarrow BD \,//\, CE \Rightarrow$ BDEC là hình thang. Do tính đối xứng nên $\widehat{CBD} = \widehat{EDB}$, do đó BDEC là hình thang cân.

b. Kẻ tiếp tuyến chung tại A cắt BC, DE ở M, N.

Ta có $MN = 2AM = BC = 2\sqrt{Rr}$ (dễ chứng minh, chẳng hạn xem ví dụ 20). Kẻ đường cao CH của hình thang, CH cắt OB tại K.



Xét Δ BKC vuông:

$$BC^2 = KC.HC \Rightarrow 4Rr = (R + r).HC \Rightarrow HC = \frac{4Rr}{R + r}.$$

Chú ý rằng MN là đường trung bình của hình thang BDEC nên

$$S_{BDEC} = MN.CH = 2\sqrt{R.r}.\frac{4Rr}{R + r} = \frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R + r}.$$

47. a. $AB = 2\sqrt{Rr}$.

b. Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (I; x) với AB.

Xét hai trường hợp:

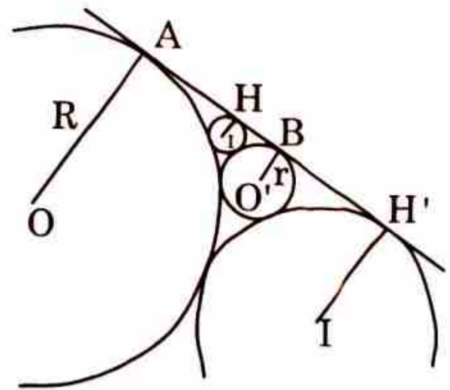
+ H thuộc đoạn AB. Theo các tính ở câu a, $HA = 2\sqrt{Rx}, HB = 2\sqrt{rx}$.

Ta có $HA + HB = AB \Rightarrow 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$.

Từ đó ta tính được $x = \dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

Thay số x = 4. Vậy IH = 4cm.

+ H thuộc tia đối của tia BA (H ở vị trí H' trên hình vẽ). Khi đó ta có $H'A - H'B = AB$. Ta tính được I'H' = 36cm.



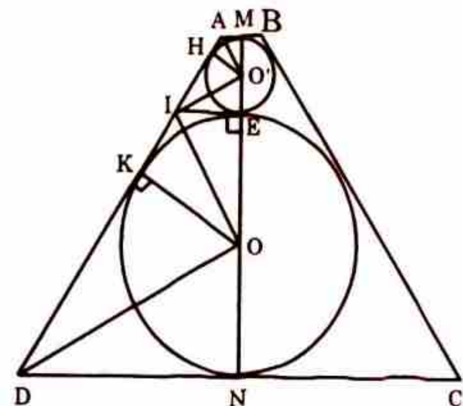
48. Gọi ABCD là hình thang cân (AB // CD), tiếp điểm của hai đường tròn (O) và (O') là E. Gọi tiếp điểm của (O') với AB, AD là M, H. Gọi tiếp điểm của (O) với CD, AD là N, K. Tiếp tuyến chung tại E cắt AD ở I. Xét Δ O'AI vuông

$O'H^2 = IH.HA \Rightarrow 4 = 4HA \Rightarrow HA = 1cm$.

Suy ra AM = 1cm.

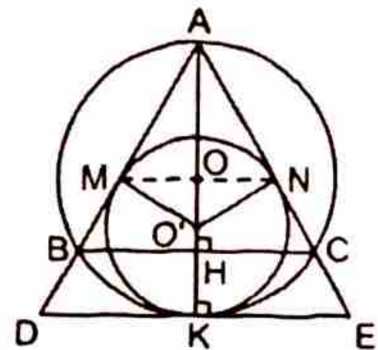
Tương tự, DN = DK = 16cm.

$S_{ABCD} = (AM + DN).MN = 340(cm^2)$.



49. a. Gọi K là tiếp điểm của hai đường tròn. Ta có A, O, O', K thẳng hàng. Kẻ tiếp 9tuyến chung tại K cắt AB, AC ở D, E. Ta có Δ ADE đều, O' là giao điểm của các đường phân giác nên cũng là giao điểm của các đường trung trực. Suy ra M, N là trung điểmcủa AD, AE. Ta lại có O là trung điểm của AK nên M, O, N thẳng hàng.

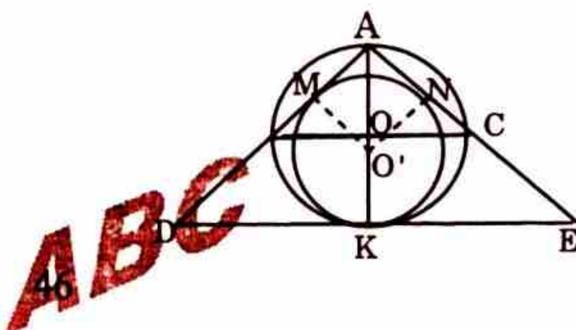
b. $O'K = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{2R}{3}$.

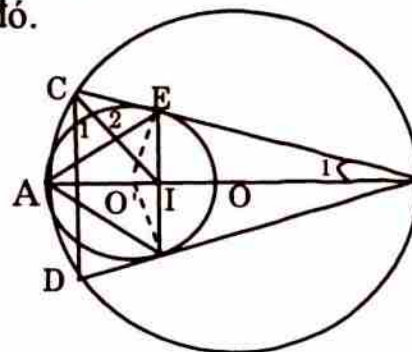


50. Vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn $O'K = O'M = (AD + AE - DE) : 2$

Đáp số: $2R(\sqrt{2} - 1)$.

51. Do tính đối xứng nên $CD \perp AB$, $EF \perp AB$. Ta có $\widehat{CAE} = \widehat{EAB}$ (cùng bằng $\widehat{O'EA}$) nên EC = EI. Suy ra $\hat{C}_2 = \hat{I}_1$, lại có $\hat{C}_1 = \hat{I}_1$ nên $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. Điểm I là giao điểm của các đường pahan giác các góc B và C của Δ BCD nên là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó.



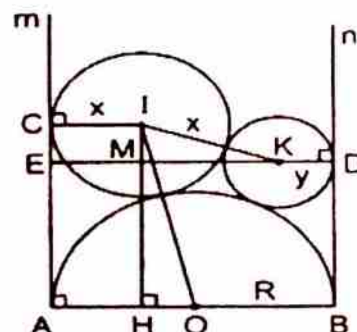


52. Gọi A, B, C là tâm của các đường tròn bán kính R đã cho, O là tâm của đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn trên. O là tâm của ΔABC đều, $OA = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Xét hai trường hợp:

+ Ba đường tròn đã cho tiếp xúc trong với đường tròn $(O; R_1)$. Khi đó $R_1 = OA + r$.

+ Ba đường tròn đã cho tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O;R_2)$. Khi đó $R_2 = OA - r$. Đáp số: $R_1 = r(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1)$; $R_2 = r(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1)$.

53. Kẻ $IC \perp Am$, $KD \perp Bn$, DK cắt Am tại E. Kẻ $IH \perp AB$, IH cắt DE tại M.



Ta có: $IK^2 - MK^2 = IM^2$. (1)

Ta lại có $IK = x + y$,

$MK = 2R - x - y, IM = CE = AC - BD$

$= 2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{Ry}$

(công thức tính đoạn tiếp tuyến chung).

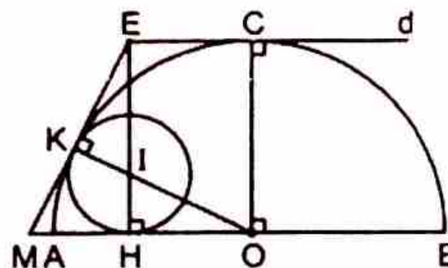
$= 2\sqrt{R}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

Thay vào (1) được

$(x + y)^2 - (2R - x - y)^2 = 4R(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ sử đường tròn (I) tiếp xúc với (O) tại K và tiếp xúc với AB tại H. Tiếp tuyến

$\Leftrightarrow 2R(2x + 2y - 2R) = 4R(x + y - 2\sqrt{xy})$

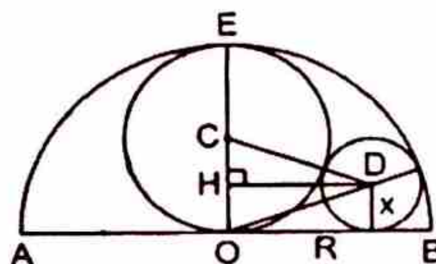
$\Leftrightarrow x + y - R = x + y - 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{xy}$.



54. Giả tuyến của đường tròn (I) tại K cắt OA ở M, cắt HI ở E. Ta có MK = MH, $\Delta MHE = \Delta MKO$ (g.c.g)

$\Rightarrow HE = KO = OC$. Suy ra tứ giác HOCE là hình chữ nhật, $CE \perp CO$. Do đó đường thẳng CE trung với đường thẳng d.

Dễ thấy IE = IO.Vậy I cách đều d và O.



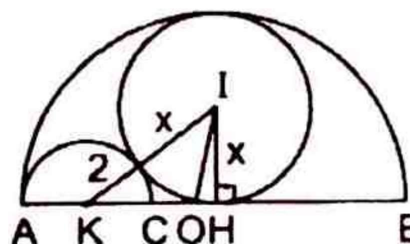
55. Gọi x là bán kính của đường tròn (D).

Kẻ $DH \perp OE$.

Ta có $OD^2 - OH^2 = CD^2 - CH^2$

nên $(R - x)^2 = (\frac{R}{2} + x)^2 - (\frac{R}{2} - x)^2$

Từ đó Ta tìm được $x = \frac{R}{4}$.



56. Gọi K là trung điểm của AC.

Kẻ $IH \perp AB$. Dễ thấy OK = 4cm.

Gọi x là bán kính của (I).

Đặt OH = y. Ta có: $IH^2 = OI^2 - OH^2 \Rightarrow x^2 = (6-x)^2 - y^2$ (1)

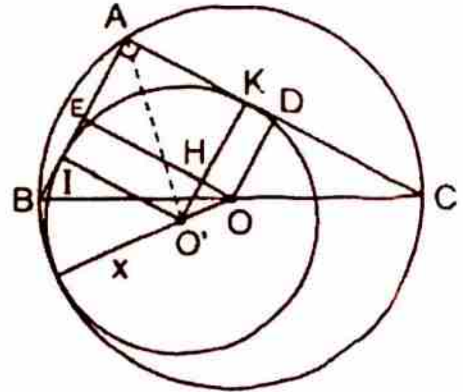
$IH^2 = IK^2 - KH^2$. Ta có: KH = 4 + y (nếu O thuộc đoạn KH).

KH = 4 – y (nếu H nằm giữa K và O).

Do đó $x^2 = (x+2)^2 - (4 \pm y)^2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $(6-x)^2 - y^2 = (x+2)^2 - (4 \pm y)^2$. Từ đó $y = 2x - 6$ hoặc $y = 6 - 2x$. Thay vào (1) và rút gọn được $4x(x-3) = 0$. Suy ra x = 3 (và do đó y = 0).

Đáp số: 3 cm.

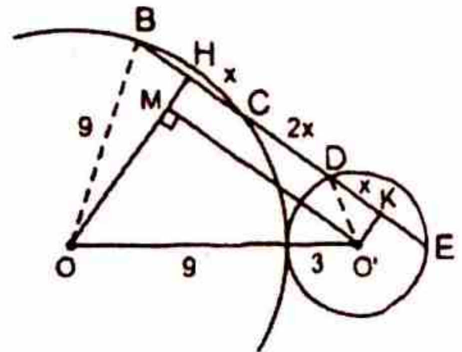


57. Tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm của BC. Gọi x là bán kính của (O'), ta có $OO' = 5 - x$. Kẻ OD, O'K vuông góc với AC; OE, O'I vuông góc với AB. Dễ dàng tính được OD = 3cm, OE = 4cm.OE cắt O'K tại H.

Ta có:

$OH = OE - EH = 4 - O'I = 4 - x; O'H = O'K - HK = x - OD = x - 3.$

Xét Δ OO'H vuông có $(4-x)^2 + (x-3)^2 = (5-x)^2$. Suy ra x = 4.



58. Ta có BC = CD = DE. Kẻ OH, O'K vuông góc với BE, O'M vuông góc với OH. Đặt CH = DK = x thì CD = 2x,

O'M = HK = 4x,

$OM = OH - MH = OH - O'K$

$= \sqrt{81 - x^2} - \sqrt{9 - x^2}$.

Từ $OM^2 + O'M^2 = OO'^2$ ta có:

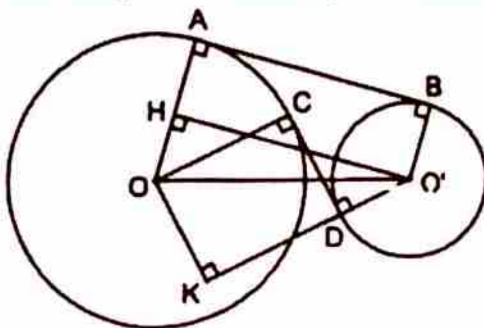
$(\sqrt{81-x^2} - \sqrt{9-x^2})^2 + 16x^2 = 144$.

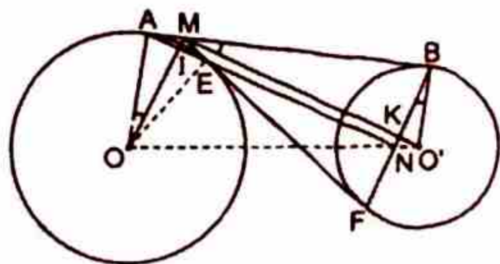
Rút gọn ta được $7x^2 - 27 = \sqrt{729 - 90x^2 + x^4}$. Bình phương hai vế (với $x^2 \geq \frac{27}{7}$) rồi rút gọn được $48x^2(x^2 - 6) = 0$. Suy ra $x = \sqrt{6}$.

Đáp số: BC = CD = DE = $2\sqrt{6}$cm.

59. Gọi R và là bán kính của các đường tròn (O) và (O'). Kẻ O'H $\perp$ O'D. Ta có $R - r = OH, R + r = O'K$. Tính OH được 16cm, O'K = 60cm.

Từ đó tính được R = 38cm, r = 22cm.





60. a. Δ AOM ~ Δ BMO'(g.g). Chú ý rằng: $\widehat{AOM} = \widehat{BMO'}$ (do cùng phụ với $\widehat{OMA}$).

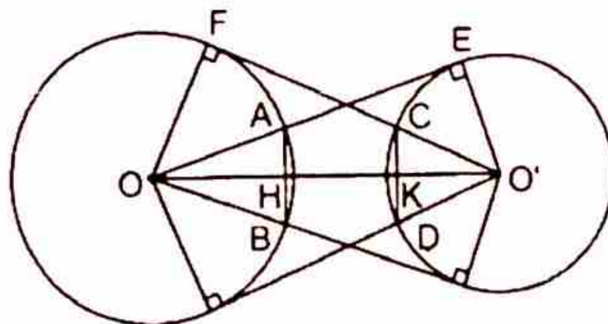
b. Ta có MO ⊥ AE, MO' ⊥ BF, mà MO ⊥ MO' (tia phân giác của hai góc kề bù) nên AE ⊥ BF.

c. Gọi I là giao điểm của OM và AE. Trước hết ta chứng minh rằng hai tam giác OIN và OMO' đồng dạng. Thật vậy, hai tam giác AOM và BMO' đồng dạng (câu a) có AI và BK là các đường cao tương ứng nên $\frac{OI}{OM} = \frac{MK}{MO'}$. Ta lại có MK = IN nên $\frac{OI}{OM} = \frac{IN}{MO'}$.

Suy ra Δ OIN ~ Δ OMO' (c.g.c). Do đó $\widehat{ION} = \widehat{MOO'}$.

Vậy O, N, O' thẳng hàng.

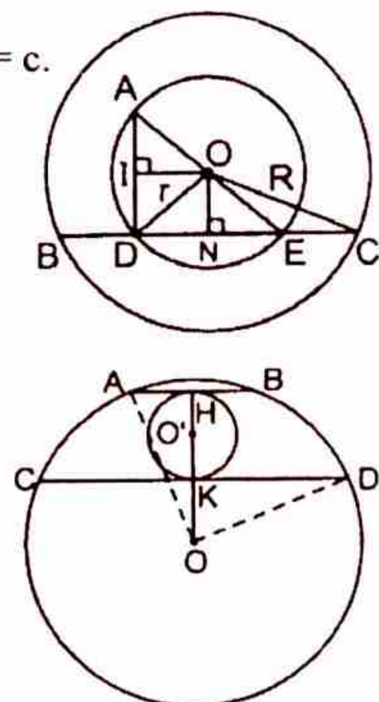
61. Gọi R, r lần lượt là bán kính của (O), (O'). Do tính đối xứng nên hình qua đường nối tâm OO', ta có AB và CD cùng vuông góc với OO' nên AB // CD. Gọi H, K theo thứ tự là giao điểm của AB, CD với OO'



Ta có $AH = R\sin\widehat{AOH}$, mà $\sin\widehat{AOH} = \sin\widehat{EOO'} = \frac{r}{OO'}$ nên $AH = \frac{Rr}{OO'}$.

Tương tự $CK = \frac{Rr}{OO'}$. Suy ra AH = CK, do đó AB = CD. Từ đó dễ dàng chứng minh được ABDC là hình chữ nhật.

62. Kẻ OI ⊥ AB, ON ⊥ DE. Đặt DA = a, DB = b, DC = c.



Ta có $r^2 = DI^2 + DN^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{c-b}{2})^2$

$R^2 = ON^2 + NC^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{b+c}{2})^2$

Do đó $R^2 + r^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2}$,

suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2(R^2 + r^2)$.

63. Kẻ OH ⊥ AB, OK ⊥ CD.

Ta có: $OH^2 + HA^2 = OK^2 + KD^2$ nên

$OH^2 - OK^2 = KD^2 - HA^2 = 12^2 - 5^2 = 119$.

Nếu O nằm giữa H và K thì:

OH + OK = HK = 7,

do đó OH − OK = 119 : 7 = 17, vô lí.

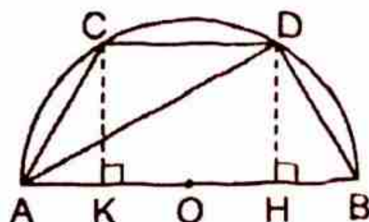
Vậy O nằm ngoài đoạn thẳng HK và OH − OK = HK = 7.

Suy ra OH + OK = 119 : 7 = 17.

Từ OH + OK = 17 và OH − OK = 7, ta tính được OK = 5cm.

Bán kính của đường tròn (O) bằng 13cm.

64. Gọi C là điểm chính giữa của cung AB, H là giao điểm của OC và AB. Ta có $OC \perp AB$. Đặt OB = x. Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔOHB, ta tính được $x = \dfrac{a^2 + h^2}{2h}$.



65. Ta có CD // AB $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$.

Đặt AC = BD = x thì $CD = 3 - 2x$.

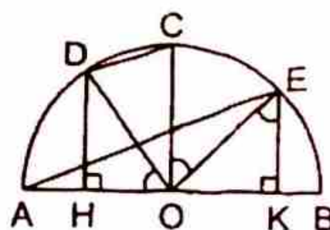
Kẻ DH, CK vuông góc với AB.

Ta có $HB = KA = \dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{2x - 1}{2}$.

ΔDAB vuông nên

$DB^2 = AB.HB \Rightarrow x^2 = 2.\dfrac{2x-1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy AC = BD = 1cm, do đó CD = 1cm.



66. $S_{AEK} = \dfrac{AK.EK}{2} = \dfrac{(10 + OK)EK}{2}$ (1)

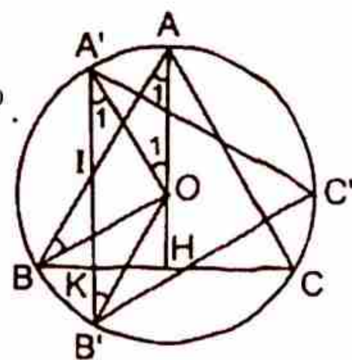
DC // AE $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{COE}$.

Ta lại có $\widehat{COE} = \widehat{OEK}$ (do OC // EK)

nên $\widehat{AOD} = \widehat{OEK}$.

Suy ra ΔOEK = ΔDOH (cạnh huyền và góc nhọn) nên EK = OH = 6cm, OK = DH = 8cm.

Thay vào (1) được $S_{AEK} = 54cm^2$.



67. ΔAOB = ΔA'OB' (c.g.c). Do $\widehat{A}_1 = 30^0$ nên $\widehat{A'_1} = 30^0$.

Ta lại có $\widehat{AOA'} = 30^0$ nên A'B' // AO. (1).

Tương tự OB' // AB (2).

Từ (1) và (2) suy ra AIB'O là hình bình hành (I là giao điểm của AB và A'B').

Do đó AI = OB' = OA.

Đặt OA = R thì $AB = R\sqrt{3}, BH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, $BI = AB - AI = R\sqrt{3} - R = R(\sqrt{3} - 1)$.

Gọi K là giao điểm của A'B' và BC.

Ta có: $S_{BIK} : S_{BAH} = (\dfrac{IB}{AB})^2 = \left[\dfrac{R(\sqrt{3}-1)}{R\sqrt{3}}\right]^2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{3}$ nên $S_{BIK} : S_{BAC} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{3}$.

Gọi diện tích phần chung là S', ta có:

$\dfrac{S'}{S} = \dfrac{S - 3S_{BIK}}{S} = 1 - \dfrac{3(2 - \sqrt{3})}{3} = \sqrt{3} - 1$. Vậy $S' = (\sqrt{3} - 1)S$.

2. Các bài toán chứng minh

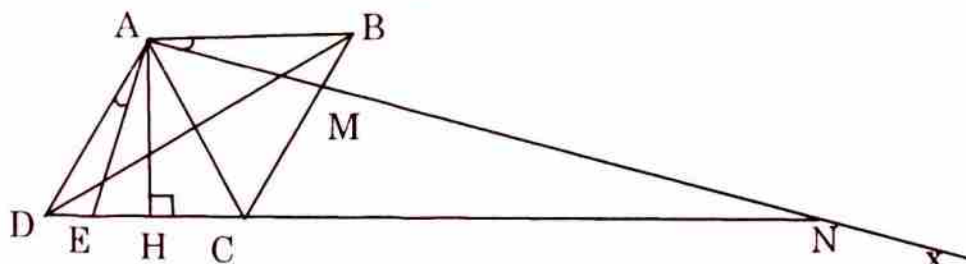
Dạng 1: Chứng minh hệ thức hình học

Ví dụ 1: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 120^0$. Tia Ax tạo với tia AB góc BAx bằng 15^0 và cắt cạnh BC tại M, cắt đường thẳng DC tại N.

Chứng minh: $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{4}{3AB^2}$.

HSG lớp 9, quận Cầu Giấy Hà Nội , 2005 – 2006

Giải



Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = 15^0$, suy ra $\widehat{NAE} = 90^0$.

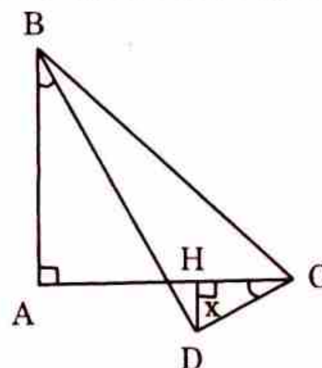
$\Rightarrow \Delta DAE = \Delta BAM\,(g.c.g) \Rightarrow AE = AM$. Xét tam giác EAN vuông tại A, đường cao AH, ta có $\dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AH^2}$, suy ra $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AH^2}$ (1)

Xét tam giác đều ADC, đường cao AH, ta có $AH^2 = \dfrac{3}{4}AD^2 = \dfrac{3}{4}AB^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh rằng AH = 3HD.

Giải



$\Delta HCD \sim \Delta ABM$ (g.g) mà AB = 2AM nên HC = 2HD.

Đặt HD = x thì HC = 2x.

Ta có: $DH^2 = HM.HC$ hay $x^2 = HM.2x$

$\Rightarrow HM = 0,5x; MC = 2,5x; AM = 2,5x; AH = 3x$

Vậy AH = 3HD.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB, BC, CA là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh rằng HM = 2.

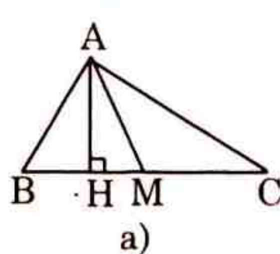
Giải

Đặt BC = a thì $AB = a - 1, AC = a + 1$. Đặt HM = x.

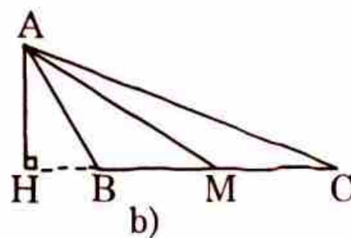
Ta thấy $HB = MB - MH$ (nếu $\widehat{B} \le 90^0$, h.a),

$HB = MH - MB$ (nếu $\widehat{B} > 90^0$, h.b),

Nên $HB^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$.



a)



b)

Ta có:

$AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$

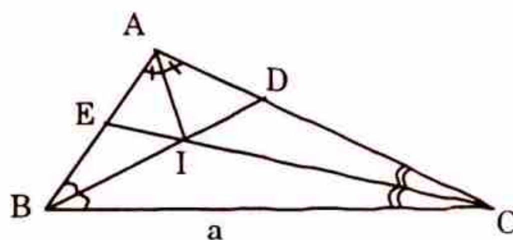
(cùng bằng AH^2) nên:

$$(a+1)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = (a-1)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Giải phương trình trên, ta được x = 2. Vậy HM = 2.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông nếu các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn BD.CE = 2BI.CI.

Giải



Từ giả thiết suy ra: $\frac{BI}{BD}.\frac{CI}{CE} = \frac{1}{2}$ (1)

Ta sẽ tính các tỉ số $\frac{BI}{BD}, \frac{CI}{CE}$ theo các cạnh của ΔABC.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Theo tính chất đường phân giá có $\frac{BI}{ID} = \frac{AB}{AD}$ nên $\frac{BI}{BI + ID} = \frac{AB}{AB + AD}$.

Ta tính được $AD = \frac{bc}{c+a}$, do đó:

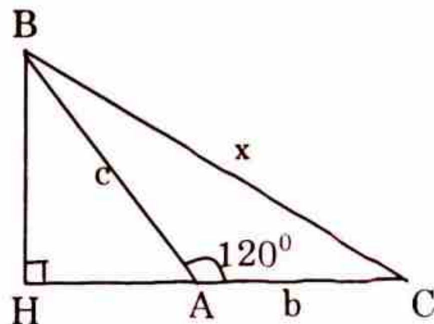
$$\frac{BI}{BD} = \frac{c}{c + \frac{bc}{c+a}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{c+a}} = \frac{c+a}{a+b+c}. \quad (2)$$

Tương tự $\frac{CI}{CE} = \frac{b+a}{a+b+c}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta suy ra được $a^2 = b^2 + c^2$, do đó ΔABC vuông tại A.

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$, BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh rằng $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

Giải



Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có:

$a^2 = BH^2 + HC^2$

$= BH^2 + (AH + AC)^2$

$= BH^2 + AH^2 + 2AH.AC + AC^2$

$a^2 = c^2 + cb + b^2$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng trong một tam giác:

a. Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia trừ đi hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

b. Bình phương của cạnh đối diện với góc tù bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia cộng với hai lần tích của một trong hai cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

Giải

Xét ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi c' là hình chiếu của cạnh AB trên BC. Ta phải chứng minh:

Nếu $\hat{B} < 90^0$ thì $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$;

Nếu $\hat{B} > 90^0$ thì $b^2 = a^2 + c^2 + 2ac'$.

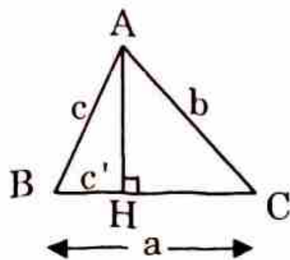
a. Nếu $\hat{B} < 90^0$ thì $b^2 = AH^2 + HC^2$. Chú ý rằng nếu $\hat{C} < 90^0$ thì $HC = a - HB$ (h.a), còn nếu $\hat{C} \geq 90^0$ thì $HC = HB - a$ (h.b), cả hai trường hợp đều có $HC^2 = (a - HB)^2$. Do đó $b^2 = (c^2 - HB^2) + (a - HB)^2$

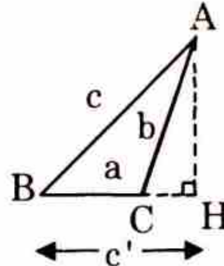
$= c^2 - HB^2 + a^2 + HB^2 - 2a.HB = a^2 + c^2 - 2ac'$.

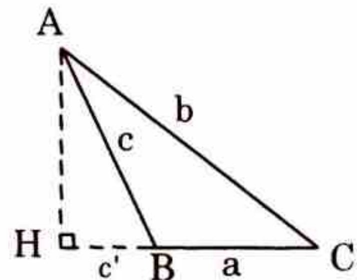
b. Nếu $\hat{B} > 90^0$ thì

$b^2 = AH^2 + HC^2 = (c^2 - HB^2) + (a + HB)^2$

$= c^2 - HB^2 + a^2 + HB^2 + 2a.HB = a^2 + c^2 + 2ac'$.







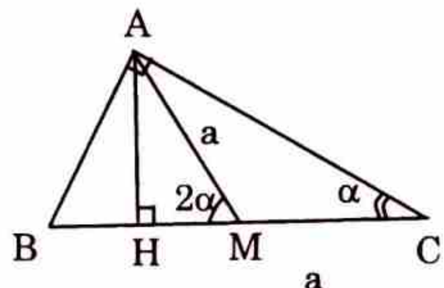
Ví dụ 7: Xét tam giác ABC vuông tại A, AB < AC, $\hat{C} = \alpha < 45^0$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, MA = MB = MC = a. Chứng minh các công thức:

a. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

b. $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

c. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

Giải



Ta có $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AC}, \cos\alpha = \dfrac{CH}{AC}$, $\widehat{AMH} = 2\alpha$,

$\cos 2\alpha = \dfrac{HM}{AM} = \dfrac{HM}{a}, \sin 2\alpha = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AH}{a}$.

a. $2\sin\alpha.\cos\alpha = 2.\dfrac{AH}{AC}.\dfrac{CH}{AC} = \dfrac{2AH.CH}{AC^2}$

$= \dfrac{2AH.CH}{BC.CH} = \dfrac{2AH}{2a} = \dfrac{AH}{a} = \sin 2\alpha$

b. Xét $2\cos^2\alpha = 2\left(\dfrac{CH}{AC}\right)^2 = \dfrac{2.CH^2}{BC.CH} = \dfrac{2CH}{2a} = \dfrac{CH}{a}$. (1)

Xét $1 + \cos 2\alpha = 1 + \dfrac{HM}{a} = \dfrac{a + HM}{a} = \dfrac{CH}{a}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

c. Thay $\cos^2\alpha$ bởi $1 - \sin^2\alpha$ vào $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, ta có:

$1 + \cos 2\alpha = 2 - 2\sin^2\alpha$ nên $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$.

Ví dụ 8: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Chứng minh rằng nếu $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} = \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{c}$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Giải

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{1}{p-a} = \dfrac{b+c-a}{2} > 0$; $\dfrac{1}{p-b} > 0$; $\dfrac{1}{p-c} > 0$. Áp dụng kết quả câu a ta có: $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} \ge \dfrac{4}{2p-(a+b)} = \dfrac{4}{c}$.

Tương tự, suy ra $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \ge \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{c}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} = \dfrac{4}{c} \\ \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} = \dfrac{4}{a} \\ \dfrac{1}{p-c} + \dfrac{1}{p-a} = \dfrac{4}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-a = p-b \\ p-b = p-c \\ p-c = p-a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và có độ dài 3 cạnh BC, AC, AB lần lượt bằng a, b, c. Chứng minh rằng:

$\sqrt{a\,\text{SinA}} + \sqrt{b.\text{SinB}} + \sqrt{c.\,\text{SinC}} = \sqrt{(a+b+c)(\text{SinA} + \text{SinB} + \text{SinC})}$

Giải

Vẽ đường cao AH. Ta có $\text{Sin}\,B = \dfrac{AH}{HB}$;$\text{Sin}C = \dfrac{AH}{HC} \Rightarrow \ldots \dfrac{b}{\text{SinB}} = \dfrac{c}{\text{SinC}}$

Tương tự, suy ra: $\dfrac{a}{SinA} = \dfrac{b}{SinB} = \dfrac{c}{SinC} = \dfrac{a+b+c}{SinA + SinB + SinC} = k > 0$

Vậy $\sqrt{aSinA} + \sqrt{bSinB} + \sqrt{cSinC} = ... = (SinA + SinB + SinC).\sqrt{k}$ (1)

và $(a + b + c) = (SinA + Sin B + SinC).k$

Suy ra:

$\sqrt{(a+b+c)(SinA+SinB+SinC)} = (SinA + SinB + SinC).\sqrt{k}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đ.p.c.m.

Ví dụ 10: Cho tam giác nhọn ABC có BC = a, AC = b, AB = c và nội tiếp đường tròn(O; R).

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

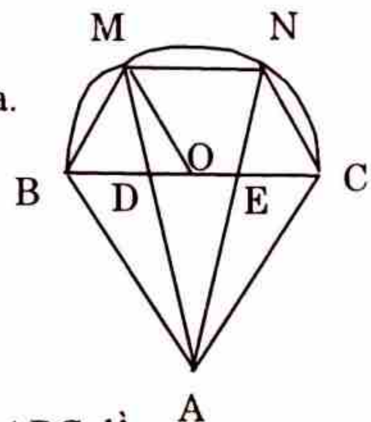
Giải

Kẻ đường kính BD.

Ta có: $BC = BD\sin D = 2R\sin A$ nên $\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$

Chứng minh tương tự $\dfrac{b}{\sin B} = 2R, \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Ví dụ 11: Cho nửa đường tròn đường kính BC. Các điểm M, N thuộc nửa đường tròn sao cho $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NC}$. Các điểm D, E thuộc đường kính BC sao cho BD = DE = EC. Gọi A là giao điểm của MD và NE. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.



Giải

Gọi O là tâm của nửa đường tròn. Đặt OB = OC = a.

Dễ thấy MOCN là hình thoi cạnh a.

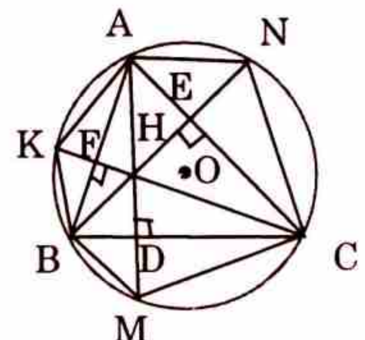
Do DE // MN nên $DE : MN = \dfrac{2a}{3} : a = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow AD = \dfrac{2}{3}AM \Rightarrow AD = 2DM$.

Ta lại có DC = 2DB nên $\Delta ADC \sim \Delta MDB$.

Suy ra AC = 2MB = 2a. Tương tự AB = 2a. Vậy ΔABC đều.

Ví dụ 12: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở M, N, K. Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CK}{CF} = 4.$



Giải

Gọi H là trực tâm của ΔABC. Kí hiệu $S_{ABC} = S$.

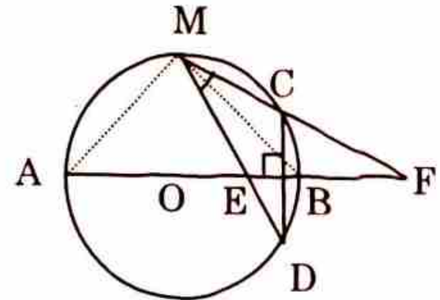
Dễ chứng minh DM = DH. Ta có:

$\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AD + DM}{AD} = 1 + \dfrac{DM}{AD} = 1 + \dfrac{DH}{AD} = 1 + \dfrac{S_{BHC}}{S}.$

Tương tự: $\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{AHC}}{S}, \frac{CK}{CF} = 1 + \frac{S_{AHB}}{S}$.

Cộng từng vế ba đẳng thức trên, ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 13: Cho đường tròn tâm O. đường kính AB có dây CD vuông góc với AB.Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường tròn (MC không song song vớiAB), E là giao điểm của MD và AB. F là giao điểm của MC và AB.Chứng minh rằng $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB}$.



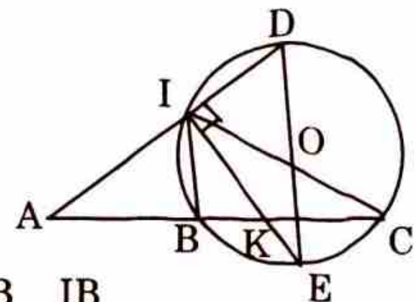
Giải

Giả sử M thuộc cung lớn CD. Chứng minh rằng MB là đường phân giác trong, do đó MA là đường phân giác ngoài của ΔMEF. Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác.

Trường hợp M thuộc cung nhỏ CD, chứng minh tương tự.

Ví dụ 14: Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến ABC. Gọi E là điểm chính giữa của cung BC. DE là đường kính của đường tròn. AD cắt đường tròn tại I. IE cắt BC tại K.

Chứng minh rằng AC. BK = AB. KC.



Giải

IK là đường phân giác trong của ΔIBC nên $\frac{KB}{KC} = \frac{IB}{IC}$.

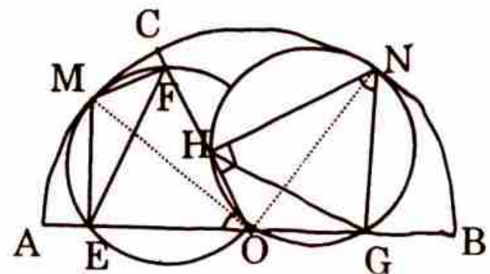
IA là đường phân giác ngoài của ΔIBC nên $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$.

Suy ra $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$, do đó AC.BK = AB.KC.

Ví dụ 15: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. bán kính OC = R. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cung AC, CB. Gọi E, G theo thứ tự là hìnhchiếu của M, N trên AB. Gọi F, H theo thứ tự là hình chiếu của M, N trên OC. Chứng minh rằng EF = GH.

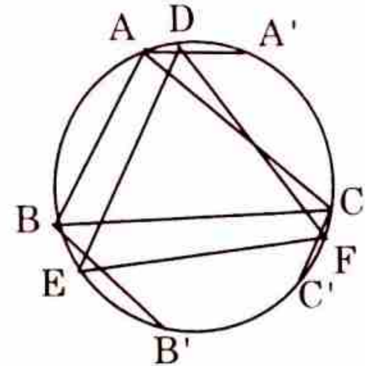
Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{AOC} \le \widehat{BOC}$. Các điểm O, E, M, F thuộc đường tròn đường kính OM = R. Các điểm O, G, N, H thuộc đường tròn đường kính ON = R. Trong hai đường tròn bằng nhau đó, các góc nội tiếp EOF, GNH bằng nhau (cùng bù với góc GOH) nên $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{GH}$, suy ra EF = GH.



Ví dụ 16: Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vẽ các dây AA' // BC, BB'// AC, CC' // AB. Trên các cung AA', BB', CC', lấy các cung AD, BE, CF theo thứ tự bằng $\frac{1}{3}$ các cung trên. Chứng minh rằng tam giác DEF là tam giác đều.

Giải



Giả sử $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$.

Đặt sđ $\overset{\frown}{BC} = m$, sđ $\overset{\frown}{AC} = n$, sđ $\overset{\frown}{AB} = p$.

Ta có $m + n + p = 360^0$, sđ $\overset{\frown}{AA'} = n - p$,

sđ $\overset{\frown}{BB'} = m - p$, sđ $\overset{\frown}{CC'} = m - n$,

$$\overset{\frown}{DF} = \frac{2sđ\overset{\frown}{AA'}}{3} + sđ\,\overset{\frown}{A'C} + \frac{sđ\overset{\frown}{CC'}}{3}$$

$$= \frac{2(n-p)}{3} + p + \frac{m-n}{3} = \frac{m+n+p}{3} = 120^0.$$

$$sđ\,\overset{\frown}{DE} = \frac{sđ\overset{\frown}{AA'}}{3} + sđ\,\overset{\frown}{AB} + \frac{sđ\overset{\frown}{BB'}}{3} = \frac{n-p}{3} + p + \frac{m-p}{3} = \frac{m+n+p}{3} = 120^0.$$

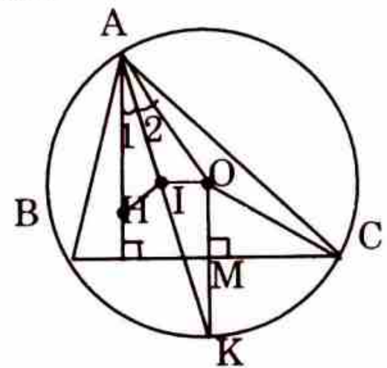
Suy ra $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF}$. Vậy ΔDEF đều.

Ví dụ 17: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm, I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

a. Chứng minh rằng AI là tia phân giác của góc OAH.

b. Cho $\widehat{BAC} = 30^0$. Chứng minh rằng IO = IH.

Giải



a. Gọi K là giao điểm của AI và đường tròn.

Ta có $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ vì cùng bằng $\hat{K}$.

b. Với ΔABC nội tiếp đường tròn (O), ta chứng minh được AH gấp đôi khoảng cách OM từ O đến BC.

Ta lại có $\widehat{BAC} = 60^0$ nên $\widehat{KOC} = 60^0$, do đó: $OM = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA$. Suy ra $AH = AO$, $\Delta AIH = \Delta AIO$ (c.g.c) nên IH = IO.

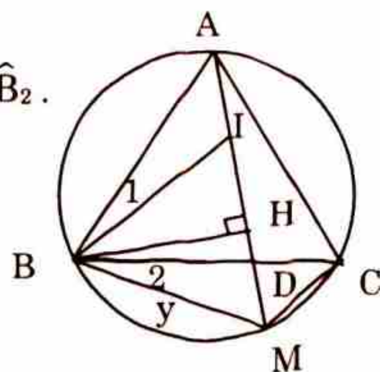
Ví dụ 18: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung BC.

a. Chứng minh rằng MA = MB + MC.

b. Gọi D là giao điểm của MA và BC. Chứng minh rằng $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = 1$.

c. Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R.

Giải



a. Trên MA lấy I sao cho MI = MB.

Tam giác MBI đều, suy ra $\widehat{IBM} = 60^0$, do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

$\Delta ABI = \Delta CBM$ (c.g.c) nên AI = MC.

Từ đó MA = MB + MC.

b. $\Delta MCD \sim \Delta MAB$ (g.g) nên:

$\frac{MD}{MB} = \frac{MC}{MA}, \frac{MD}{MC} = \frac{MB}{MA}.$

Do đó: $\frac{MD}{MB} + \frac{MD}{MC} = \frac{MC}{MA} + \frac{MB}{MA} = \frac{MC + MB}{MA} = 1$ (theo câu a).

c. Đặt MA = x, MB = y. Ta có:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2 - xy)$ (1)

Kẻ $BH \perp AM$. Do $\widehat{BMH} = 60^0$ nên $MH = \frac{y}{2}, BH^2 = y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4}$.

Do đó $AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = x^2 + y^2 - xy$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2$

Ta lại có $AB = R\sqrt{3}$. Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

Ví dụ 19: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.

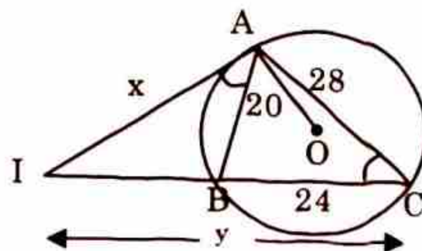
a. Chứng minh rằng $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

b. Tính IA, IC, biết rằng AB = 20 cm. AC = 28 cm, BC = 24 cm.

Giải

a. Ta có: $\widehat{BAI} = \widehat{C}$, $\Delta BAI \sim \Delta ACI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}$.

Ta lại có $IA^2 = IB.IC$ nên $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IB.IC} = \frac{IB}{IC}$.



b. Đặt IA = x, IC = y.

Ta có: $\Delta BAI \sim \Delta ACI$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y - 24}{x} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x = 5y \\ 5x = 7(y - 24) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 49 \end{cases}$

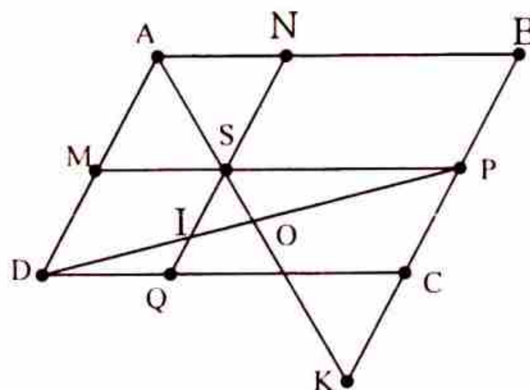
Dạng 2: Các bài toán chứng minh đồng quy, thẳng hàng

Ví dụ 1: Cho hình bình hành ABCD. Qua một điểm S ở trong hình bình hành ABCD kẻ đường thẳng song song với AB lần lượt cắt AD, BC tại M, P và cũng qua S. Kẻ đường thẳng song song với AD lần lượt cắt AB, CD tại N, Q. Chứng minh ba đường thẳng AS, BQ, DP đồng quy.

Giải

Gọi I là giao điểm của DP và NQ. K là giao điểm của SA và BC.

Ta có: $\frac{KP}{PB} = \frac{PK}{AM} = \frac{SP}{SM} = \frac{SP}{QD} = \frac{IS}{IQ}$



Vậy $\frac{KP}{BP} = \frac{IS}{IQ}$.

Suy ra $\frac{KP}{IS} = \frac{BP}{IQ}$ (1)

Gọi O là giao điểm SA và DP.

Ta có: $\frac{OP}{OI} = \frac{KP}{IS}$ (2)

Gọi O' là giao điểm BQ và DP. Ta có: $\frac{O'P}{O'I} = \frac{BP}{IQ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có:

Vậy O' trùng O, tức là SA, BQ và DP đồng quy.

Ví dụ 2: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và $\widehat{ACB} = 45^0$. Kẻ các đường cao AA' và BB'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, M và N tương ứng là trung điểmcủa AB và CH.

1. Chứng minh rằng A'MB'N là hình vuông.
2. Chứng minh rằng A'B', MN, OH đồng quy.

TS 10 Toán – Đại học Vinh năm 2009 -2010 (vòng 2)

Giải

1. Sử dụng tính chất đường trung tuyến ta có:

   $MA' = MB' = \frac{1}{2}AB.(1); NA' = NB' = \frac{1}{2}CH.(2)$

   Từ giả thiết ta có: ΔCA'A và ΔBA'H vuông cân.

   Suy ra ΔCA'H = ΔAA'B, vì vậy: CH = AB. (3)

   Lại có: $\widehat{NA'C} = \widehat{NCA'} = \widehat{MAA'} = \widehat{MA'A}$, nên $\widehat{MA'N} = \widehat{AA'C} = 90^0$ (4)

   Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra A'MB'N là hình vuông.

2. Ta có O và A' cùng thuộc trung trực của AC, nên OA' ⊥ AC.

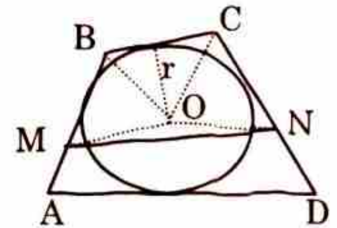
   Suy ra OA' // B'H. Tương tự OB' // A'H.

   Vì vậy B'OA'H là hình bình hành.

   Do đó OH cắt A'B' tại I là trung điểm của mỗi đường. Rõ ràng từ kết quả ý 1, MN cũng đi qua I. Vậy A'B', MN, OH đồng quy.

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp một đường tròn. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn đó.

Giải



Gọi (O;r) là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD, S là diện tích tam giác, p là nửa chu vi. Gọi M, N là hai điểm nằm trên cạnh của tứ giác và chia tứ giác ra hai phần có chu vi bằng nhau.

Không mất tính tổng quat, giả sử M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh CD (chú ý không nhất thiết M và N thuộc hai cạnh đối của tứ giác), giả sử O nằm trong tứ giác hoặc nằm trên cạnh của tứ giác BMNC. Ta có:

$$S_{BMNC} = S_{MOB} + S_{BOC} + S_{CON} + S_{MON} = \frac{1}{2}r\left(MB + BC + CN\right) + S_{MON} = \frac{pr}{2} + S_{MON}$$

$$S_{AMND} = S_{MOA} + S_{AOD} + S_{DON} - S_{MON} = \frac{1}{2}r\left(MA + AD + DN\right) - S_{MON} = \frac{pr}{2} - S_{MON}$$

Do $S_{BMNC} = S_{AMND}$ nên từ (1) và (2) suy ra $S_{MON} = 0$. Vậy đường thẳng MN đi qua O.

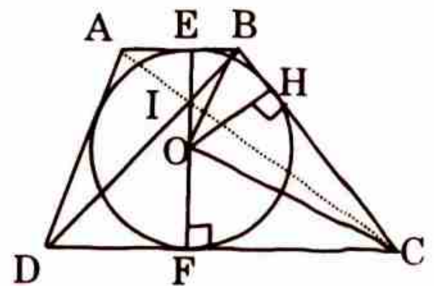
Chú ý:

a. Có thể không chứng minh đẳng thức (2) mà nhận xét rằng công thức $S = pr$ đúng với tứ giác ngoại tiếp, do đó $\frac{S}{2} = \frac{pr}{2}$, nên từ (1) suy ra $S_{MON} = 0$.

b. Bài toán trên vẫn đúng nếu thay "tứ giác ngoại tiếp" bởi "đa giác ngoại tiếp".

Ví dụ 4: Cho hình thang ABCD (AB // CD) ngoại tiếp đường tròn (O). Tiếp điểm trên AB, CD theo thứ tự là E, F. Chứng minh rằng AC, BD, EF đồng quy.

Giải



Gọi H là tiếp điểm của BC và đường tròn (O;r). Ta có BE = BH, CF = CH, $\widehat{BOC} = 90^0$ nên $BE.CF = BH.CH = r^2$.

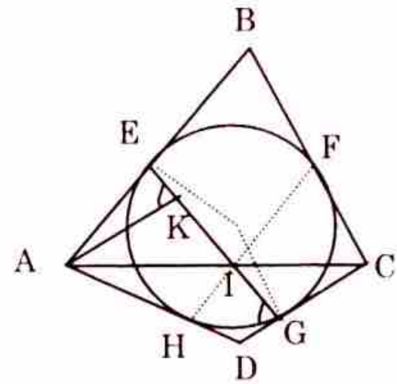
Tương tự $AE.DF = r^2$.

Suy ra $BE.CF = AE.DF$, do đó $\frac{BE}{DF} = \frac{AE}{CF}$.

Gọi I là giao điểm của BD và EF. Ta có $\frac{BE}{DF} = \frac{IE}{IF}$. Suy ra $\frac{AE}{CF} = \frac{IE}{IF}$, Từ đó $\Delta AIE \sim \Delta CIF$ (c.g.c), dễ dàng chứng minh A, I, C thẳng hàng.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng quy tại giao điểm các đường chéo của tứ giác.

Giải



Kí hiệu như trên hình vẽ:

Gọi I là giao điểm của AC và EG. Trước hết ta chứng minh F, I, H thẳng hàng.

Qua A vẽ đường thẳng song song với CD, cắt EG ở K.

Ta có $\widehat{EKA} = \widehat{AEK}$ (cùng bằng $\widehat{EGD}$) nên AE = AK.

Do đó $\frac{IA}{IC} = \frac{AK}{CG} = \frac{AE}{CG}$ tức là I chia trong AC theo tỉ số $\frac{AE}{CG}$. Gọi I' là giao điểm của AC và GH. Chứng minh tương tự, I' chia trong AC theo tỉ số $\frac{AH}{CF}$. Nhưng AE = AH, CG = CF nên I và I' chia trong AC theo cùng một tỉ số, do đó $I \equiv I'$. Vậy F, I, H thẳng hàng, do đó AC đi qua giao điểm của EG và FH.

Chứng minh tương tự, BD cũng đi qua giao điểm trên.

Ví dụ 6: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo BD và AC. Chứng minh rằng:

a. $S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$; b. Ba điểm I, O, K thẳng hàng

Giải

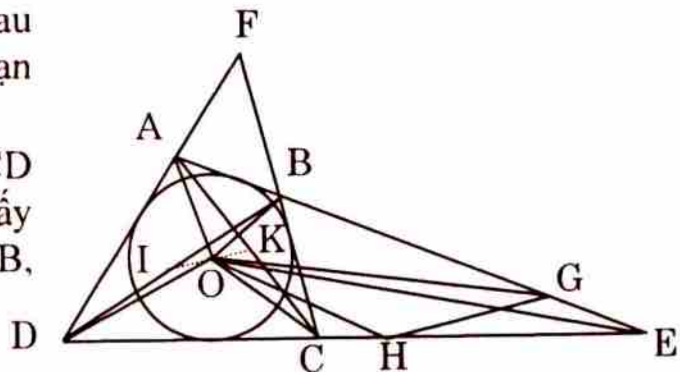
a. Gọi r là bán kính của đường tròn (O), S là diện tích tứ giác ABCD.

Ta có: $S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{r}{2}(AB + CD)$; $S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{r}{2}(AD + BC)$

Do AB + CD = AD + BC nên $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC} = \frac{1}{2}S$.

b. Giả sử các tia AB và CD cắt nhau tại E (trường hợp AB // CD, bạn đọc tự chứng minh).

"Dồn" các đoạn thẳng AB và CD về phía E: lấy G trên tia EA, lấy H trên tia ED sao cho EG = AB, EH = CD.



Ta có:

$S_{OEG} + S_{OEH} = S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S$ nên $S_{OHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}$. (1).

Dễ thấy các điểm I và k cũng có tính chất $S_{IAB} + S_{ICD} = \frac{1}{2}S, S_{KAB} + S_{KCD} = \frac{1}{2}S.$

Nên tương tự như trên ta cũng có:

$S_{IHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}$. (2)

$S_{KHG} = \frac{1}{2}S - S_{EHG}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{OHG} = S_{IHG} = S_{KHG}$ do đó ba điểm I, O, K thẳng hàng.

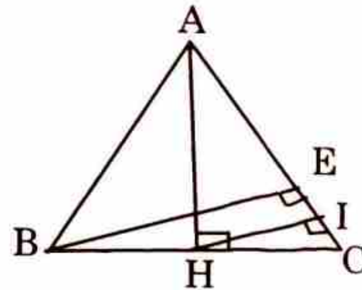
Dạng 3: Các bài toán chứng minh khác

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân có AB = AC = 9cm, BC = 12cm, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC.

a. Tính độ dài CI.

b. Kẻ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm K nằm giữa hai điểm C và A.

Giải



a. Trong ΔAHC vuông:

$HC^2 = CI.CA$.

Từ đó tính được CI = 4cm.

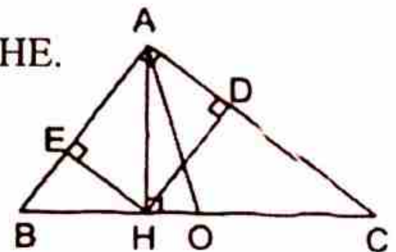
b. CK = 2CI = 8 < CA.

Do đó K nằm giữa C và A.

Ví dụ 2: Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC = 2a. Gọi AH là đường cao của tam giác, D và E là hình chiếu của H trên AC và AB. Tìm giá trị lớn nhất của :

a. Độ dài DE; b. Diện tích tứ giác ADHE.

Giải



a. Gọi O là trung điểm của BC. $DE = AH \le AO = a$;

max DE = a $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

b. ***Cách 1:*** Ta có $S_{ADHE} = AE.AD$.

Ta lại có $AH^2 = AE.AB$ nên $AE = \frac{AH^2}{AB}$. Tương tự $AD = \frac{AH^2}{AC}$.

Do đó $S_{ADHE} = \frac{AH^4}{AB.AC} = \frac{AH^4}{BC.AH} = \frac{AH^3}{BC} \le \frac{AO^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}$.

$\max S_{ADHE} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Cách 2: $S_{ADHE} = 2S_{HEA}$. Do đó S_{ADHE} lớn nhất $\Leftrightarrow S_{HEA}$ lớn nhất.

Ta thấy $\Delta HEA \sim \Delta BAC$ (g.g) nên $\frac{S_{HEA}}{S_{BAC}} = \left(\frac{AH}{BC}\right)^2$. Do đó S_{HEA} lớn nhất $\Leftrightarrow$ AH lớn nhất $\Leftrightarrow$ H trùng với O. Khi đó ΔABC vuông cân tại A, ta tính được $S_{ADHE} = \frac{a^2}{2}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Chứng minh rằng:

a. Nếu $b^2 < a^2 + c^2$ thì $\widehat{B} < 90^0$.

b. Nếu $b^2 > a^2 + c^2$ thì $\widehat{B} > 90^0$.

c. Nếu $b^2 = a^2 + c^2$ thì $\widehat{B} = 90^0$.

Giải

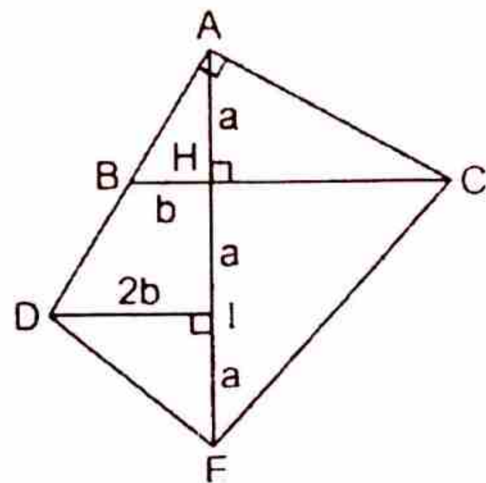
a. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $\widehat{B} > 90^0$ thì theo bài tập trên , ta có $b^2 > a^2 + c^2$, trái với giả thiết. Giả sử $\widehat{B} = 90^0$ thì theo định lí Pytago ta có $b^2 = a^2 + c^2$, trái với giả thiết. Vậy $\widehat{B} < 90^0$

b. Chứng minh tương tự câu a.

c. Chứng minh tương tự câu a.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia HA sao cho HE = 2HA. Chứng minh rằng $\widehat{DEC} = 90^0$.

Giải



Gọi I là trung điểm của HE.

Đặt AH = a, HB = b thì:

$DI = 2b$, $EH = 2a$, $HC = \dfrac{AH^2}{HB} = \dfrac{a^2}{b}$.

$\tan\widehat{IED} = \dfrac{DI}{IE} = \dfrac{2b}{a}$

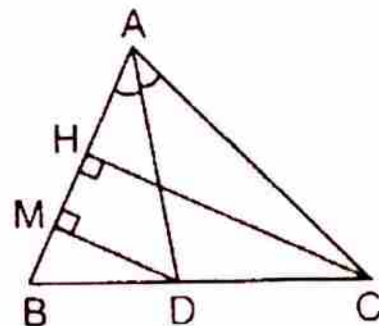
$\tan\widehat{HCE} = \dfrac{HE}{HC} = \dfrac{2a}{\frac{a^2}{b}} = \dfrac{2b}{a}$.

Suy ra $\widehat{IED} = \widehat{HCE}$ do đó $\widehat{IED} + \widehat{HEC} = 90^0$

Vậy $\widehat{DEC} = 90^0$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng trong một tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.

Giải



Xét ΔABC có $BC \geq AC \geq AB$, đường phân giác AD, đường cao CH. Cần chứng minh $CH \geq AD$.

Kẻ $DM \perp AB$.

Ta có: $AC \geq AB$

$\Rightarrow DC \geq DB \Rightarrow BC \geq 2BD \Rightarrow CH \geq 2DM$. (1).

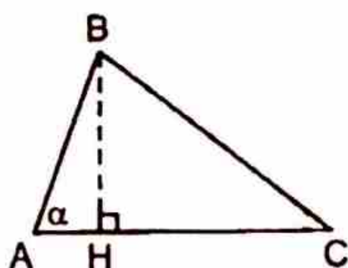
Mặt khác do $\widehat{A}$ là góc lớn nhất của ΔABC nên $\widehat{A} \geq 60^0$

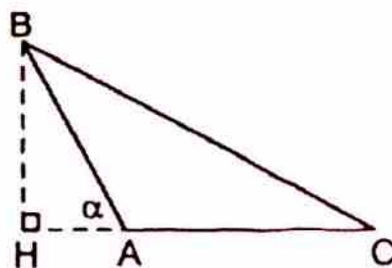
$\Rightarrow \widehat{MAD} \geq 30^0 \Rightarrow \sin\widehat{MAD} \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{DM}{AD} \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2DM \geq AD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CH \geq AD$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng diện tích của một tam giác (không vuông) bằng một nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

Giải



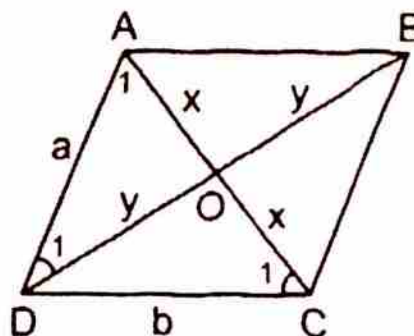


Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC của ΔABC. Vẽ đường cao BH, ta có $BH = AB\sin\alpha$. Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH = \frac{1}{2}AC.AB\sin\alpha$.

Chú ý: Sau này nghiên cứu hàm số lượng giác ta có $\sin 90^0 = 1$, $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$, do đó: Diện tích tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc tạo bởi hai cạnh ấy.

Ví dụ 7: Độ dài hai đường chéo của một hình bình hành tỉ lệ với độ dài hai cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh rằng các góc tạo bởi hai đường chéo bằng các góc của hình bình hành.

Giải



Gọi O là giao điểm hai đường chéo cuả hình bình hành ABCD.

Đặt AO = OC = x, OB = OD = y,

AD = a, DC = b, theo đề bài $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Giả sử $a \le b \Rightarrow \widehat{C}_1 < \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{C}_1 < 90^0$.

Do $a \le b$ nên $x \le y \Rightarrow \widehat{D}_1 < \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 < 90^0$.

Theo ví dụ 6, $S_{ADO} = \frac{1}{2}ay\sin\widehat{D}_1, S_{OCD} = \frac{1}{2}bx\sin\widehat{C}_1$ mà

$S_{ADO} = S_{OCD}, ay = bx \Rightarrow \sin\widehat{D}_1 = \sin\widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ADC}$.

Ví dụ 8: Tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau ở O và không vuông góc với nhau. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác AOB và COD. Gọi G và I lần lượt là trọng tâm của các tam giác BOC và AOD.

a. Gọi E là trọng tâm của tam giác AOB, F là giao điểm của AH và DK. Chứng minh rằng các tam giác IEG và HFK đồng dạng.

b. Chứng minh rằng IG vuông góc với HK.

Giải

a. Gọi $\widehat{COD} = \alpha < 90^0$.

Ta chứng minh được $\widehat{IEG} = \widehat{DOC}, \widehat{HFK} = \widehat{DOC}$ nên $\widehat{IEG} = \widehat{HFK}$ (1).

Dễ thấy $EG = \frac{1}{3}AC, EI = \frac{1}{3}BD$ nên $\frac{EG}{EI} = \frac{AC}{BD}$ (2)

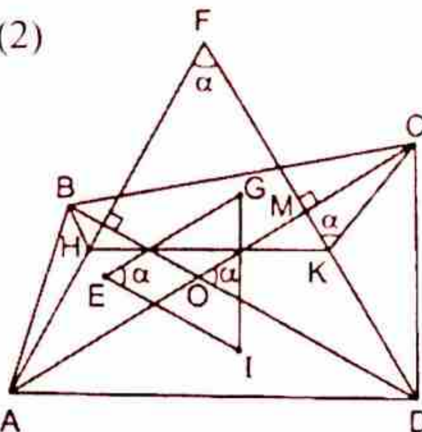
Gọi M là giao điểm của FK và AC, ta có:

$FK = FM + MK$

$= AM\cot\alpha + MC\cot\alpha = AC\cot\alpha.$

Tương tự $FH = BD\cot\alpha$.

Do đó: $\frac{FK}{FH} = \frac{AC}{BD}$. (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta IEG \sim \Delta HFK$ (c.g.c).

b. Sử dụng câu a. và chú ý rằng $IE \perp HF$.

Ví dụ 9: Cho tam giác nhọn ABC, các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC = CA. Chứng minh rằng trong ba tam giác ADF, BDE, CEF, tồn tại một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC. Khi nào cả ba tam giác đó cùng có diện tích bằng diện tích tam giác ABC ?

Giải

Chứng minh bằng phản chứng. Gọi S là diện tích ΔABC và kí hiệu như hình vẽ. Giả sử $\frac{S_1}{S} > \frac{1}{4}; \frac{S_2}{S} > \frac{1}{4}; \frac{S_3}{S} > \frac{1}{4}$ thì $\frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} > \frac{1}{64}$. (1)

Áp dụng công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (ví dụ 6) ta có:

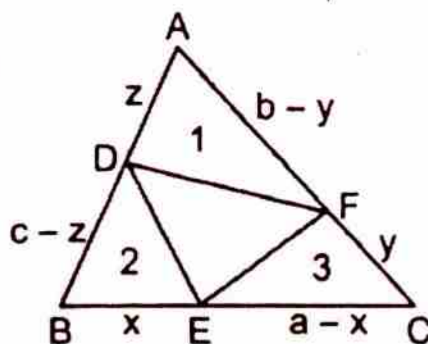
$\frac{S_1}{S} = \frac{z(b-y)}{bc}; \frac{S_2}{S} = \frac{x(c-z)}{ac}; \frac{S_3}{S} = \frac{y(a-x)}{ab}$

$\Rightarrow \frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} = \frac{x(a-x)}{a^2}.y\frac{z(b-y)}{b^2}\frac{z(c-z)}{c^2}$

Ta có:

$\frac{x(a-x)}{a^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2 \ge 4x(a-x)$

$\Leftrightarrow (a-2x)^2 \ge 0$



Tương tự đối với $\frac{y(b-y)}{b^2}, \frac{z(c-z)}{c^2}$.

Suy ra $\frac{S_1.S_2.S_3}{S^3} \le \frac{1}{64}$, mâu thuẫn với (1). Suy ra điều phải chứng minh.

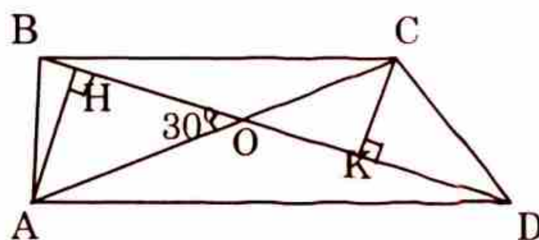
$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{4}S \Leftrightarrow a = 2x, b = 2y, c = 2z \Leftrightarrow$ D, E, F là trung điểm các cạnh của ΔABC.

Chú ý: Bài toán vẫn đúng nếu ΔABC có góc vuông hay góc tù.

Ví dụ 10: a. Cho tứ giác ABCD có AB = 10cm, BD = 12cm và góc giữa AC và BD bằng 30^0. Tính diện tích tam giác đó.

Giải

a. Vẽ $AH \perp BD$, $CK \perp BD$ $(H, K \in BD)$



ΔHOA vuông tại H có $\widehat{AOH} = 30^0$ nên là nửa tam giác đều

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}OA$, tương tự $CK = \frac{1}{2}OC$

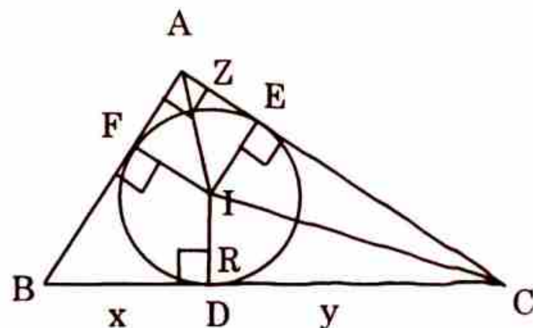
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AH.BD + \frac{1}{2}CK.BD = \frac{1}{2}BD(AH + CK)$$

$$= \frac{1}{2}BD\left(\frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OC\right) = \frac{1}{4}BD.AC = \frac{1}{4}12.10 = 30\left(cm^2\right)$$

Ví dụ 11: Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, và AB lần lượt tại D, E, và F. Đặt x = DB, y = DC, z = AE.

a. Tìm hệ thức giữa x, y và z.

b. Chứng minh rằng: $AB.AC = 2DB.DC$.



Giải

a. Ta có: BD = BF, CD = CE và AE = AF (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau).

Do đó:

BC = x + y, AC = y + z, AB = x + z.

Theo định lý Pytago:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+z)^2 + (y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 2z(x+y) + 2z^2 \Leftrightarrow xy = z(x+y+z)(a)$$

b. Gọi r là bán kính, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}BC.r + \frac{1}{2}CA.r + \frac{1}{2}AB.r = (x+y+z)r(b)$

Tứ giác AEIF có 3 góc vuông, nên là hình chữ nhật.

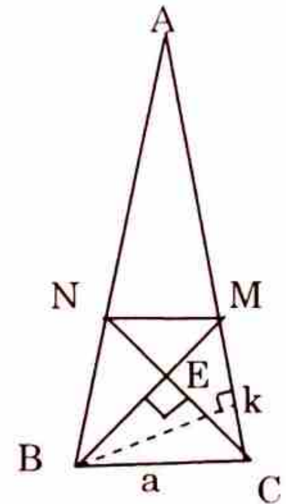
Nhưng AE = AF (chứng minh trên), nên AEIF là hình vuông.

Do đó: z = EI = r (c). Từ (a), (b), (c) suy ra

$AB.AC = 2xy \Leftrightarrow AB.AC = 2DB.DC$.

Ví dụ 12: Cho tam giác ABC cân tại A, BC = a. Hai điểm M và N lần lượt trên AC và AB sao cho: AM = 2MC,

AN = 2NB và hai đoạn BM và CN vuông góc với nhau. Tính diện tích tam giác ABC theo a.



Giải

Theo giả thiết AM = 2MC và AN = 2 NC suy ra:

$\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN//BC\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC}=\frac{2}{3}$.

Gọi E là giao điểm của BM và CN, theo định lý Talet, ta có: $\frac{EM}{EB}=\frac{EN}{EC}=\frac{MN}{BC}=\frac{2}{3}$.

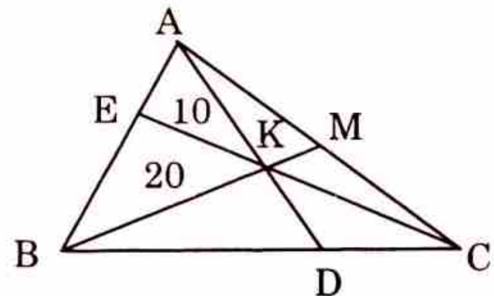
Gọi BK là đường cao hạ từ B của tam giác ABC,

ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{BCM}}=\frac{\frac{1}{2}AC.BK}{\frac{1}{2}CM.BK}=\frac{AC}{CM}=3\Rightarrow S_{ABC}=3S_{BCM}$.

$\frac{S_{BEC}}{S_{BMC}}=\frac{BE}{BM}=\frac{3}{5}\Rightarrow S_{BMC}=\frac{5}{3}S_{BEC}=\frac{5a^2}{12}$. Vậy $S_{ABC}=\frac{5a^2}{4}$.

Ví dụ 13: Trong hình bên, cho biết M là trung điểm của AC và các đường thẳng AD, BM và CE đồng quy tại K. Hai tam giác AKE và BKE có diện tích là 10 và 20. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải



Gọi h là khoảng cách từ K đến AB, ta có:

$\frac{S_{\Delta AKE}}{S_{\Delta BKE}}=\frac{AE\times\frac{h}{2}}{BE\times\frac{h}{2}}=\frac{AE}{BE}\Leftrightarrow\frac{AE}{BE}=\frac{1}{2}$

+ Suy ra: $\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta BCE}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow S_{\Delta BCE}=S_{\Delta ACE}$ (1)

+ Tương tự: $\frac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta CKM}}=\frac{MA}{MB}=1\Leftrightarrow S_{\Delta AMK}=S_{\Delta CKM}$

Đặt $x=S_{\Delta AKM}=S_{\Delta CKM}$, ta có:

$S_{ABM}=S_{CBM}\Leftrightarrow 20+10+x=x+S_{BCK}\Rightarrow S_{BCK}=30$

$(1)\Rightarrow 20+S_{BCK}=2(10+2x)\Leftrightarrow 10+2x=25\Leftrightarrow x=\frac{15}{2}$

Do đó: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AKB}+S_{\Delta BCK}+S_{\Delta AKC}=10+20+30+2x=75$.

Ví dụ 14: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Phân giác AD, trung tuyến BE và đường cao CF cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng $\widehat{BAC}>45^0$.

Thi học sinh giỏi lớp 9 –TP Vinh,Nghệ An -2009

Giải

Chứng minh bằng phản chứng

+ Giả sử $\widehat{BAC}<45^0$.



Khi đó $\widehat{ACF} > 45^0, \widehat{BCF} < 45^0, \widehat{CBF} > 45^0$ và suy ra $BC < AC$.

+ Như vậy tia CP nằm giữa hai tia CA và CF và cắt trung tuyến BE tại G. Ta ký hiệu O là điểm cắt của BE, AD, và CF.

Thế thì G nằm giữa O và E. Vì $\frac{PG}{GC} = \frac{1}{2}$, thì $\frac{FO}{OC} < \frac{1}{2}$. (Ở đây ta dùng $\widehat{FOB} < 90^0$ và suy ra $\widehat{FOG} > 90^0$). Bởi vì AO là phân giác trong tam giác AFC, thì $\frac{FO}{OC} = \frac{AF}{AC} < \frac{1}{2}$, từ đây suy ra $\widehat{ACF} < 30^0$. Trái với $\widehat{ACF} > 45^0$ ở trên $\widehat{BAC} > 45^0$.

Ví dụ 15: cho ABCD là hình thoi có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và N thuộc cạnh CD sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Tính các góc của hình thoi ABCD.

TS 10 chuyên Thành phố HCM năm 2009 – 2010

Giải :

Trong nửa mặt phẳng bờ AD không chứa điểm B, lấy điểm E sao cho:

$AE = AM$ và $\widehat{DAE} = \widehat{BAM} \Rightarrow \Delta ADE = \Delta ABM \Rightarrow DE = BM, \widehat{ADE} = \widehat{ABM}$

Mà ABCD là hình thoi $\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADN}$ (1)

Ta có: $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN} \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{BAM} + \widehat{NAD} = \widehat{DAE} + \widehat{NAD} = \widehat{EAN}$

Xét hai tam giác ANM và ANE có: $\widehat{MAN} = \widehat{EAN}, AM = AE$ và AN chung $\Rightarrow \Delta ANM = \Delta ANE \Rightarrow NE = NM$.

Mặt khác ta có: $2 = CM + CN + MN = CM + CN + NE$

Mà $2 = CB + CD = CM + MB + CN + ND = CM + DE + CN + ND$

$\Rightarrow CM + CN + NE = CM + DE + N + ND$

$\Rightarrow NE = ND + DE \Rightarrow$ D thuộc đoạn NE (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADN} = 90^0$. Suy ra: Hình thoi ABCD có $\widehat{ADC} = 90^0$ nên là hình vuông. Vậy các góc của hình thoi ABCD bằng 90^0.

Bài tập vận dụng

Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a. Vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$.

Hướng dẫn và đáp số

Vẽ đường vuông góc với AM tại A, cắt CD ở N. Trong ΔANI vuông, ta có $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AI^2}$. Sau đó chứng minh rằng AN = AM.

3. Các bài toán chứng minh về đường tròn

Kiến thức cơ bản

Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$*) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.*

Khi $OM = R$ *ta có điểm M nằm trên đường tròn.*

Khi $OM < R$ *ta có điểm M nằm bên trong đường tròn.*

Khi $OM > R$ *ta có điểm M nằm bên ngoài đường tròn.*

Qua ba điểm không thẳng hàng, bao giờ cũng vẽ được một và chỉ một đường tròn.

Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của đường tròn. Đường tròn có vô số trục đối xứng, đó là bất kì đường kính nào của nó.

2. Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Định lí: *Trong một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.*

Định lí:

a. Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

b. Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Định lí : *Trong một đường tròn:*

a. Hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

b. Trong hai dây không bằng nhau, dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

Định lí: *Trong một đường tròn:*

- Hai cung bằng nhau khi và chỉ khi hai dây căng cung bằng nhau;

- Cung lớn hơn khi và chỉ khi dây căng cung lớn hơn.

Định lí *- Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau;*

- Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và chia dây ấy thành hai phần bằng nhau;

- Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không phải là đường kính) thì chia cung căng dây ấy thành hai phần bằng nhau.

Lưu ý: *Khi nói cung AB mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là cung nhỏ AB.*

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Đường thẳng và đường tròn không giao nhau khi và chỉ khi chúng không có điểm chung

Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau khi và chỉ khi chúng có một điểm chung .

Đường thẳng và đường tròn cắt nhau khi và chỉ khi chúng có hai điểm chung .

Gọi khoảng cách d từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính R của đường tròn, khi đó ta có các liên hệ: Đường thẳng và đường tròn không giao nhau khi và chỉ khi $d < R$. *Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau khi và chỉ khi* $d = R$.. *Đường thẳng và đường tròn cắt nhau khi và chỉ khi* $d > R$.

Định lí:

1. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

2. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

4. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

5. Đường tròn nội tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

6. Đường tròn bàng tiếp tam giác

Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác. Tâm của mỗi đường tròn bàng tiếp tam giác là giao điểm hai đường phân giác của hai góc ngoài của tam giác hoặc giao điểm của tia phân giác của góc trong và một trong hai đường phân giác của góc ngoài không kề với nó.

7. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Hai đường tròn không giao nhau khi và chỉ khi chúng không có điểm chung
Hai đường tròn tiếp xúc nhau khi và chỉ khi chúng có một điểm chung
Hai đường tròn cắt nhau khi và chỉ khi chúng có hai điểm chung
Do tính đối xứng của đường tròn, nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

8. Góc nội tiếp: *Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó*

- Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn. Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

- Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

- Nếu góc BAX có số đo bằng nửa số đo của cung BA nằm trong góc đó thì Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn chứa cung AB.

- Nếu MT là tiếp tuyến và MAB là cát tuyến của một đường tròn thì ta có hệ thức $MT^2 = MA.MB$.

- Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

9. Cung chứa góc: *Cung chứa góc* α $(0^0 < \alpha < 180^0)$ *dựng trên đoạn thẳng AB là cung mà mọi góc ACB có đỉnh C thuộc cung đó đều có số đo bằng* α. *Áp dụng cung chứa góc vào chứng minh: Nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc* α *thì bốn đỉnh của tứ giác ấy thuộc cùng một đường tròn.*

Áp dụng cung chứa góc vào các bài toán quỹ tích và dựng hình

10. Tứ giác nội tiếp: *Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).*

- Trong một tứ giác nội tiếp, hai góc đối bù nhau.

Đảo lại, nếu một tứ giác có hai góc đối bù nhau thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, khi đó đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.

- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác, khi đó đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

- Điều kiện cần và đủ để một tứ giác ngoại tiếp đường tròn là tổng các cạnh đối bằng nhau.

- Đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp, một đường tròn nội tiếp. Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và được gọi là tâm của đa giác đều.

Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Sự xác định của một đường tròn

Sử dụng định nghĩa: Đường tròn tâm O bán kính R (với R > O) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

Dạng 2: Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Dạng 3: Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Các bài toán về tiếp tuyến

Dạng 4: Vị trí tương đối của hai đường tròn

Dạng 5: Chứng minh góc nội tiếp. Quỹ tích cung chứa góc

Dạng6 : Chứng minh tứ giác nội tiếp,ngoại tiếp

Dạng7: Các bài toán tổng hợp

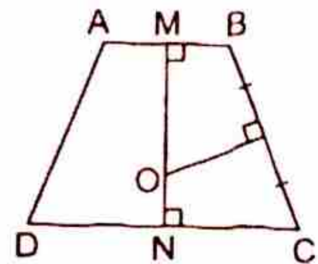
Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Sự xác định của một đường tròn

Ví dụ 1. Cho hình thang cân ABCD. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua cả bốn đỉnh của hình thang.

Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh đáy của hình thang cân. MN là trục đối xứng của hình thang cân nên MN là đường trung trực của AB và của CD. Gọi O là giao điểm của MN với đường trung trực của BC.



O thuộc đường trung trực của AB nên OA = OB.

O thuộc đường trung trực của BC nên OB = OC.

O thuộc đường trung trực của CD nên OC = OD.

Vậy OA = OB = OC = OD, do đó đường tròn (O;OA) đi qua các điểm A, B, C, D.

Dạng 2. Đường kính và dây của đường tròn. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Quan hệ về độ dài giữa đường kính và dây được thể hiện ở định lí: Trong một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây được thể hiện ở các định lí

- Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

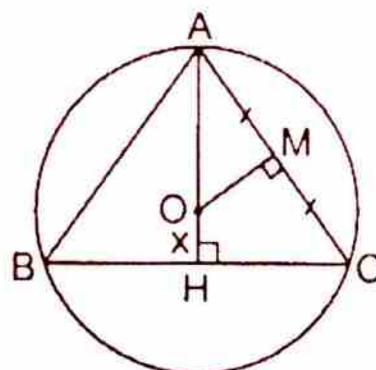
- Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc và dây ấy.

Để so sánh độ dài hai dây của một đường tròn dựa vào các định lí: Trong một đường tròn

- Hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.

Trong hai dây không bằng nhau, dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). AC = 40cm. BC = 48cm. Tính khoảng cách từ O đến BC.



Giải

Kẻ đường cao AH. Ta tính được AH = 32cm.

Do AH > HC nên tâm O nằm giữa A và H.

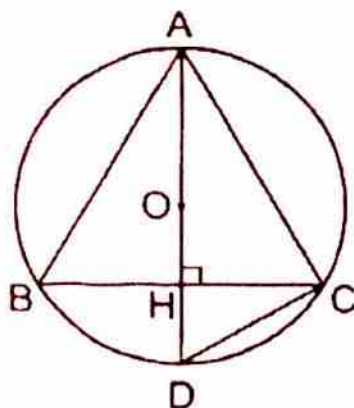
Đặt OH = x. Kẻ OM ⊥ AC.

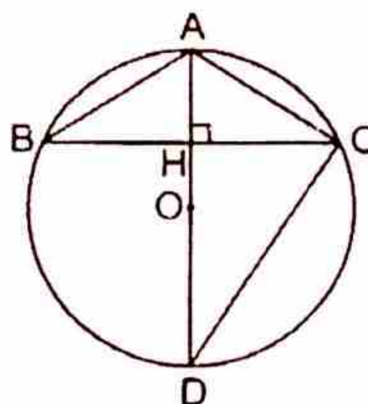
Ta có: $\Delta AMO \sim \Delta AHC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AM}{AH} \Rightarrow \dfrac{32-x}{40} = \dfrac{20}{32}$. Từ đó x = 7cm.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O): cạnh bên bằng b, đường cao AH = h. Tính bán kính của đường tròn (O).

Giải





Kẻ đường kính AD thì $\widehat{ACD} = 90^0$.

Ta có: $AC^2 = AD.AH$ nên $AD = \dfrac{AC^2}{AH} = \dfrac{b^2}{h}$.

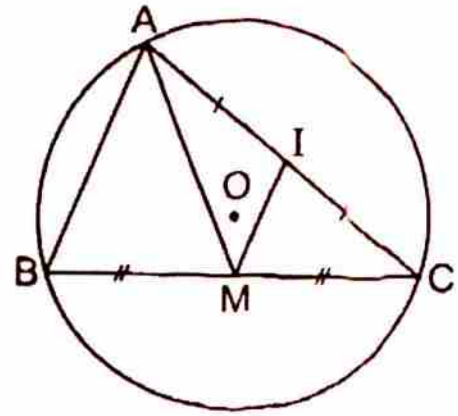
Bán kính của đường tròn bằng $\dfrac{b^2}{2h}$.

Ví dụ 3: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử O nằm trong tam giác AMC hoặc O nằm giữa A và M. Gọi I là trung điểm của AC. Chứng minh rằng:

a. Chu vi tam giác IMC lớn hơn 2R.

b. Chu vi lam giác ABC lớn hơn 4R.

Giải



a. Ta có: $IC + IM = IA + IM > AM$ nên:

$IC + IM + MC > AM + MC$ (1)

Ta chứng minh được:

$AM + MC > AO + OC = R + R = 2R$ (2)

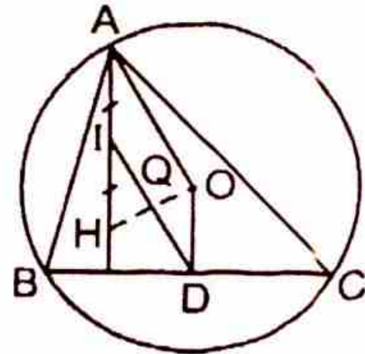
Từ (1) và (2) suy ra ΔIMC lớn hơn 2R.

b. Chu vi ΔIMC bằng nửa chu vi ΔABC

(vì $IC = \frac{AC}{2}, IM = \frac{AB}{2}, MC = \frac{BC}{2}$) nên từ câu a) suy ra chu vi ΔABC lớn hơn 4R.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Kẻ các đường thẳng DD', EE', FF' sao cho DD'// OA, EE' // OB. FF' // OC. Chứng minh rằng các đường thẳng DD', EE', FF' đồng quy.

Giải

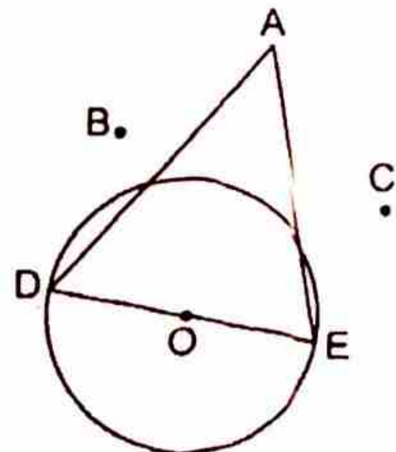


Gọi H là trực tâm của ΔABC, I là trung điểm của AH. Ta chứng minh được AH = 2OD, DOAI là hình bình hành, suy ra DD' đi qua trung điểm Q của OH.

Tương tự EE', FF' cũng đi qua Q (điểm Q là tâm đường tròn Ơ-le của ΔABC).

Ví dụ 5: Cho ba điểm A, B, C bất kì và đường tròn (O) bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho $MA + MB + MC \geq 3$.

Giải



Gọi DE là một đường kính của đường tròn (O), ta có:

$DA + EA \geq DE = 2;$

$DB + EB \geq DE = 2,$

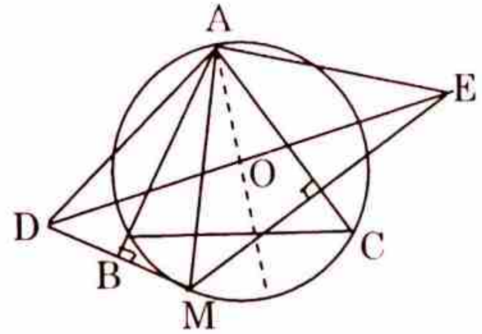
$DC + EC \geq DE = 2.$

Suy ra $(DA + DB + DC) + (EA + EB + EC) \geq 6.$

Nếu $DA + DB + DC \geq 3$ thì điểm M phải tìm là D.Nếu $DA + DB + DC < 3$ thì $EA + EB + EC > 3$, điểm M phải tìm là E.

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

Giải



AB là đường trung trực của MD nên AM = AD, AC là đường trung trực của ME nên AM = AE.

Suy ra AD = AE.

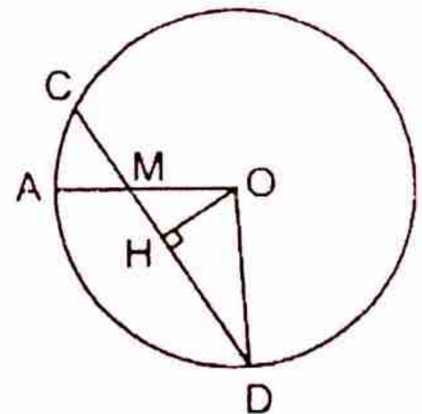
Ta có:

$\widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{MAB} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}$.

Tam giác ADE cân tại A có $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC}$ không đổi nên DE lớn nhất $\Leftrightarrow$ AD lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM là đường kính của đường tròn (O).

Ví dụ 7: Cho đường tròn tâm O bán kính OA = 11cm. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là 7cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm. Tính các độ dài MC, MD.

Giải



Giả sử $MC \le MD$. Kẻ $OH \perp CD$.

Ta có $HC = HD = \frac{CD}{2} = \frac{18}{2} = 9(\text{cm})$

Tam giác OHD vuông nên:

$OH^2 = OD^2 - HD^2 = 11^2 - 9^2 = 121 - 81 = 40$.

Tam giác OHM vuông nên

$MH^2 = OM^2 - OH^2 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow MH = 3\text{cm}$

Do đó $MD = MH + HD = 3 + 9 = 12(\text{cm})$,

$MC = HC - MH = 9 - 3 = 6(\text{cm})$.

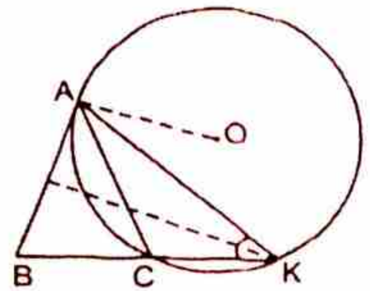
Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

Phương pháp chứng minh tiếp tuyến

Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung trực của AB cắt BC ở K. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK.

Giải

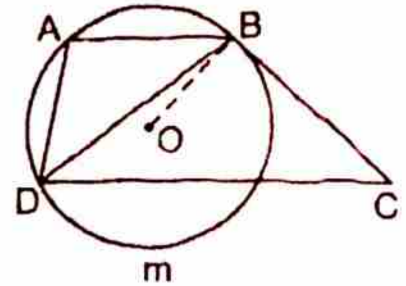


Các tam giác cân ABC, KBA có chung góc ở đáy $\hat{B}$ nên $\widehat{CAB} = \widehat{AKB}$ tức $\widehat{CAB} = \widehat{AKC}$.

Ta có: $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$, từ đó AB là tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có BD^2 = AB. CD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BC.

Giải



$BD^2 = AB.CD \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BD}$.

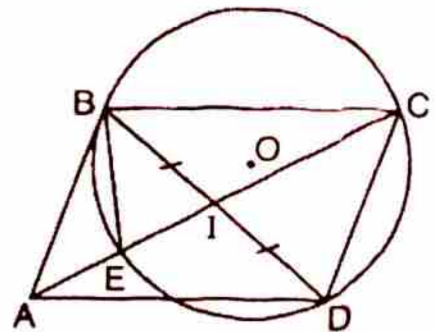
Ta có: $\Delta DBC \sim \Delta BAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{BAD} \Rightarrow \widehat{DBC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BmD}$.

Từ đó BC là tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD, $A < 90^0$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

Giải



Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.

Ta có $IE.IA = IE.IC = IB.ID = IB^2$.

Ta có $\Delta IBE \sim \Delta IAB$ (c.g.c)

nên $\widehat{IBE} = \widehat{IAB}$.

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CC' ($C \in (O), C' \in (O')$), kẻ đường kính COD. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với C'D, CC'. Chứng minh rằng :

a. $\widehat{EAF} = 90^0$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO')

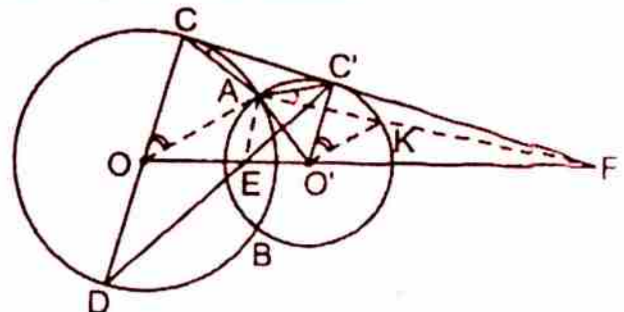
b. FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'.

Giải

a. Gọi R, R' là bán kính của các đường tròn (O), (O'). Điểm E chia trong OO', điểm F chia ngoài OO' theo cùng một tỉ số $\frac{R}{R'}$, do đó AE là đường phân giác trong, AF là đường phân giác ngoài của $\Delta AOO'$.

Suy ra $\widehat{EAF} = 90^0$.

b. Kẻ bán kính O'K song song và cùng chiều với OA. Gọi F' là giao điểm của AK với OO'.



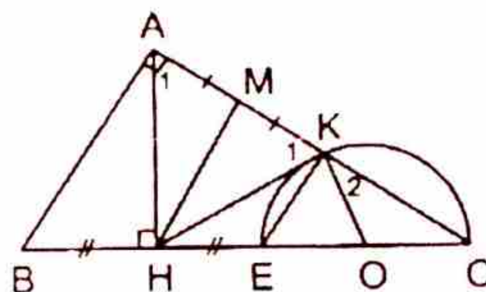
Chứng minh F' chia ngoài OO' theo tỉ số $\frac{R}{R'}$ để suy ra $F' \equiv F$.

Ta có $\widehat{COA} = \widehat{C'O'K}$ nên $\widehat{C'CA} = \widehat{C'AK}$. Từ đó AF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn có đường kính là EC cắt AC ở K. Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn.

Giải

Gọi O là trung điểm của EC thì OE = OC = OK nên $\widehat{EKC} = 90^0$. Gọi M là trung điểm của AK thì HM là đường trung bình của hình thang ABEK, do đó $HM \perp AK$. Tam giác AHK có đường cao HM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân, do đó $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1$.



Ta lại có $\widehat{K}_2 = \widehat{C}$, suy ra $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 = 90^0$, tức là $\widehat{OKH} = 90^0$. Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 6: Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là trung điểm của bán kính OB và (S) là đường tròn đường kính AC. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M, N khác A và B. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (S).

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

b. Vẽ tiếp tuyến ME của (S) với E là tiếp điểm. Chứng minh: $ME^2 = MA \cdot MP$.

c. Vẽ tiếp tuyến NF của (S) với F là tiếp điểm. Chứng minh: $\frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$.

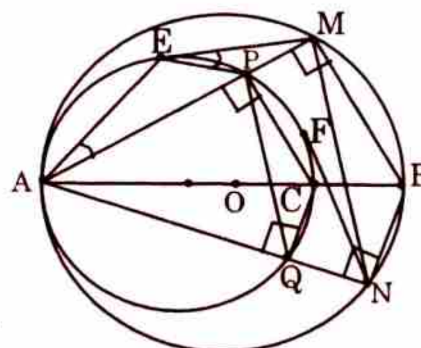
Giải

a. $\widehat{CPA} = \widehat{BMA} = 90^0 \Rightarrow CP // BM$.

Do đó : $\frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AB}$ (1)

Tương tự: $CQ // BN$ và $\frac{AQ}{AN} = \frac{AC}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2): $\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}$. Do đó $PQ // MN$.



b. Hai tam giác MEP và MAE có : $\widehat{EMP} = \widehat{AME}$ và $\widehat{PEM} = \widehat{EAM}$.

Do đó chúng đồng dạng. Suy ra: $\frac{ME}{MA} = \frac{MP}{ME} \Rightarrow ME^2 = MA \cdot MP$

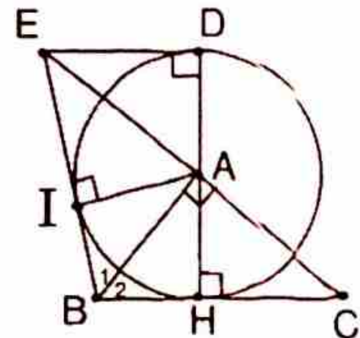
c. Tương tự ta cũng có: $NF^2 = NA \cdot NQ$. Do đó: $\frac{ME^2}{NF^2} = \frac{MA \cdot MP}{NA \cdot NQ}$

Nhưng $\dfrac{MP}{NQ} = \dfrac{MA}{NA}$ (Do PQ // MN). Từ đó: $\dfrac{ME^2}{NF^2} = \dfrac{AM^2}{AN^2} \Rightarrow \dfrac{ME}{NF} = \dfrac{AM}{AN}$

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tịa D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE. Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH)
4. Chứng minh BE = BH + DE.

Giải



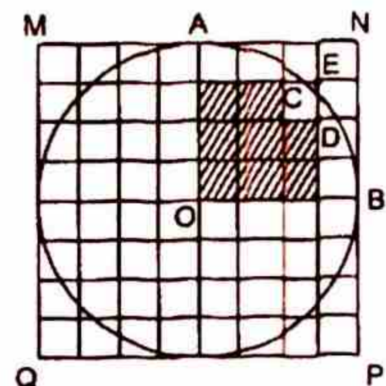
1. $\Delta AHC = \Delta ADE$ (g.c.g)
   $\Rightarrow ED = HC$ (1) và $AE = AC$ (2).
   Vì $AB \perp CE$ (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\Delta BEC \Rightarrow BEC$ là tam giác cân $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$
2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$
   $\Rightarrow \Delta HAB = \Delta AIB \Rightarrow AI = AH$.
3. $AI = AH$ và $BE \perp AI$ tại $I \Rightarrow$ BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.
4. $DE = IE$ và $BI = BH \Rightarrow BE = BI + IE = BH + ED$.

Ví dụ 8. Cho một hình vuông 8 x 8 gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt một tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm O của hình tròn trùng với tâm của hình vuông.

a. Chứng minh rằng hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông.

b. Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn ?

Giải



a. Bán kính của hình tròn bằng khoảng cách từ tâm của hình tròn đến mỗi cạnh của hình vuông (cùng bằng 4) nên hình tròn tiếp xúc với các cạnh của hình vuông.

b. Xét hình vuông AOBN và các điểm C, D, E như trên hình vẽ. Ta có $OC = OD = \sqrt{13} < 4$ nên C và D nằm trong đường tròn.

$OE = \sqrt{18} > 4$ nên E nằm ngoài đường tròn.

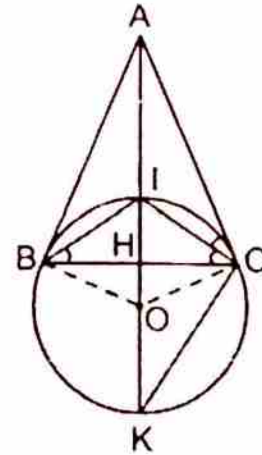
Có 8 ô vuông nhỏ bị che lấp hoàn toàn.

Vậy tổng cộng có 32 ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC cân tại A, I là giao điểm của các đường phân giác.

a. Hãy xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BIC.

b. Gọi H là trung điểm của BC, IK là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh rằng $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$.



Giải

a. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔBIC. Các điểm I và O thuộc đường trung trực của BC nên A, I, O thẳng hàng và $AO \perp BC$.

Ta có: $\widehat{OCI} = \widehat{OIC}, \widehat{ICA} = \widehat{ICB}$ nên

$\widehat{OCI} + \widehat{ICA} = \widehat{OIC} + \widehat{ICB} = 90^0$.

AC là tiếp tuyến của đường tròn.

b. Xét ΔCAH, CI là đường phân giác trong, CK là đường phân giác ngoài. Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{IA}{IH} = \frac{KA}{KH} \text{ (cùng bằng } \frac{CA}{CH}\text{) suy ra } \frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}.$$

Ví dụ 10. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax và nửa đường tròn nằm cùng phía đối với AB), C là một điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Đường thẳng qua O và vuông góc với AC cắt Ax tại M. Gọi I là giao điểm của MB và CH. Chứng minh rằng CI = IH.

Giải

Gọi N là giao điểm của BC và AM. Tam giác ABN có AO = OB. OM // BC nên NM = MA.CH // AN $\Rightarrow \frac{CI}{NM} = \frac{IH}{MA}$ (cũng bằng $\frac{BI}{BM}$) mà NM = MA nên CI = IH.

Ví dụ 11. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB, C là một điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Qua trung điểm M của CH, kẻ đường vuông góc với OC, cắt nửa đường tròn tại D và E. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn (C; CD).

Giải

OC cắt DE ở K và cắt đường tròn (O) ở I.

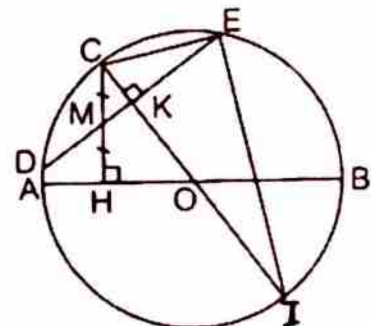
Ta có ΔCEI vuông nên:

$CE^2 = CI.CK = 2CO.CK$ (1)

$\Delta CMK \sim \Delta COH$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CM}{CO} = \frac{CK}{CH} \Rightarrow CO.CK = CM.CH$ (2)

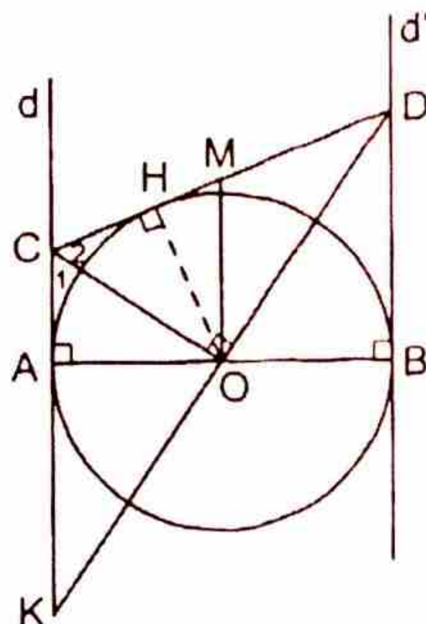
Do CH = 2CM nên $CH^2 = 2CM.CH$ (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra CE = CH. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 12: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi d và d' là các tiếp tuyến tại A và tại B của đường tròn, C là một điểm bất kì thuộc d. Đường vuông góc với OC tại O cắt d' ở D. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải

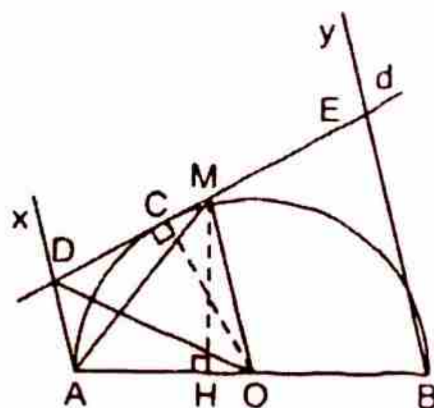


Cách 1. Kẻ OH ⊥ CD, DO cắt d tại K. Dễ dàng chứng minh CK = CD, do đó ΔCKD cân tại C, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$, suy ra OH = OA. Vậy H ∈ (O). Vì CD vuông góc với bán kính OH tại H nên CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Cách 2. Kẻ OH ⊥ CD, Gọi M là trung điểm của CD. Hãy dùng tính chất đường trung bình của hình thang và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (cùng bằng $\widehat{COM}$). Sau đó giải tiếp như ở cách 1.

Ví dụ 13: Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. C là một điểm thuộc nửa đường tròn. Qua C kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Kẻ các tia Ax, By song song với nhau, cắt d theo thứ tự tại D, E. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

Giải



Gọi M là trung điểm của DE. Kẻ MH ⊥ AB.

Ta sẽ chứng minh MH = MD.

Ta có OM là đường trung bình của hình thang ABED ⇒ OM // AD

$\Rightarrow S_{AOM} = S_{DOM} \Rightarrow \frac{1}{2}OA.MH = \frac{1}{2}OC.MD$.

Do OA = OC nên MH = MD.

Từ đó suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (M; MD).

Ví dụ 14: Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = \alpha$, đường cao AH = h. Vẽ đường tròn tâm A bán kính h. Một tiếp tuyến bất kì (khác BC) của đường tròn (A) cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại B', C'.

a. Chứng minh rằng $S_{ABC} < S_{A'B'C'}$

b. Trong các tam giác ABC có $\hat{A} = \alpha$ và đường cao AH = h, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?

Giải

a. Không mất tính tổng quát, giả sử B' thuộc cạnh AB và C' thuộc tia đối của CA Điểm H ở bên trong $\Delta AB'C'$. Qua H kẻ đường thẳng song song với B'C' cắt các cạnh AB' và AC' ở B_1 và C_1.

Dễ thấy $S_{AB_1C_1} < S_{AB'C'}$. (1).

Ta lại có $S_{ABC} < S_{AB_1C_1}$ (2)

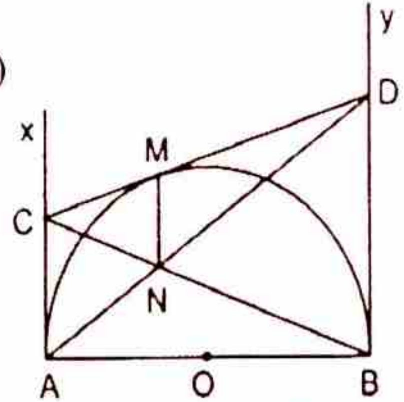
(Thật vậy, kẻ CK // AB (K thuộc B_1C_1) thì $S_{HBB_1} = S_{HCK} < S_{HCC_1}$)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABC} < S_{AB'C'}$

b. Từ câu a) suy ra trong các tam giác ABC có $\widehat{A} = \alpha$ và đường cao AH = h, tam giác cân tại A có diện tích nhỏ nhất.

Ví dụ 15: Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB và các tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Gọi N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với AB.

Giải



Ta có Ax // By nên theo định lí Ta-lét $\dfrac{ND}{NA} = \dfrac{DB}{AC}$ (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau DB = MD,

AC = MC. (2).Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{ND}{NA} = \dfrac{MD}{MC}$.

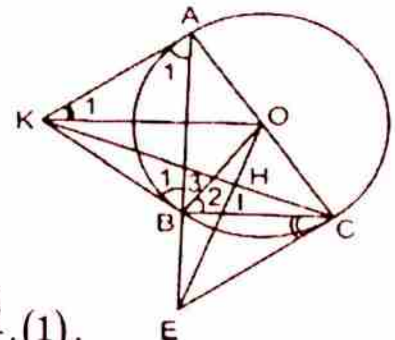
Do đó MN // AC (định lí Ta-lét đảo).

MN // AC, mà $AC \perp AB$ nên $MN \perp AB$.

Ví dụ 16: Cho đường tròn tâm O, điểm K nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB Ở E. Chứng minh rằng:

a. Các tam giác KBC và OBE đồng dạng.

b. CK vuông góc với OE.



Giải

a. Ta có AK // CE (cùng vuông góc với AC).

$\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{A}_1 \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{K}_1 = \widehat{OKB}$

$\Rightarrow \tan\widehat{BCE} = \tan\widehat{OKB} \Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{OB}{KB} \Rightarrow \dfrac{KB}{BC} = \dfrac{OB}{BE}$.(1).

Ta lại có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (cùng phụ với $\widehat{B}_3$) nên $\widehat{KBC} = \widehat{OBE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta KBC \sim \Delta OBE$ (c.g.c).

b. Từ câu a) suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{BEO}$.

Gọi I là giao điểm của BC và OE, H là giao điểm của CK và OE. Xét hai tam giác IBE và IHC ta chứng minh được $\widehat{H} = 90^0$. Vậy $CK \perp OE$.

Ví dụ 17: Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 cm, CB = 40 *cm*. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

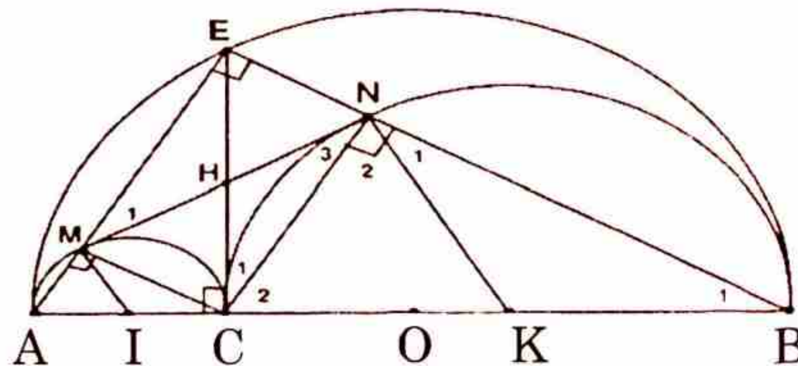
1 Chứng minh EC = MN.

2. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Tính MN.

4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn.

Giải



1. Ta có: $\widehat{BNC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)

$\Rightarrow \widehat{ENC} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù) (1)

$\widehat{AMC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I)

$\Rightarrow \widehat{EMC} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù) (2)

$\widehat{AEB} = 90$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay $\widehat{MEN} = 90^0$ (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ tứ giác CMEN là hình chữ nhật $\Rightarrow$ EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết $EC \perp AB$ tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K) $\Rightarrow$ $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN).

Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{N}_3 \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{N}_3$.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) $\Rightarrow$ tam giác KBN cân tại K $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{N}_1$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_3$ mà $\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \widehat{CNB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{N}_3 + \widehat{N}_2 = \widehat{MNK} = 90^0$ (hay $MN \perp KN$ tại N

$\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có $\widehat{AEB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)

$\Rightarrow \Delta$ AEB vuông tại A có $EC \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow EC^2 = AC.BC; EC^2 = 10.40 = 400 \Rightarrow EC = 20$ cm.

Theo trên EC = MN $\Rightarrow$ MN = 20 cm.

4. Theo giả thiết AC = 10 cm, BC = 40cm $\Rightarrow$ AB = 50cm $\Rightarrow$ OA = 25cm.

Ta có $S_{(O)} = \pi.OA^2 = \pi.25^2 = 625\pi; S_{(I)} = \pi.IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi;$

$S_{(K)} = \pi.KB^2 = \pi.20^2 = 400\pi$. Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi

ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}\left(S_{(O)} - S_{(I)} - S_{(K)}\right)$

$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\pi = 100\pi = 314\left(cm^2\right)$

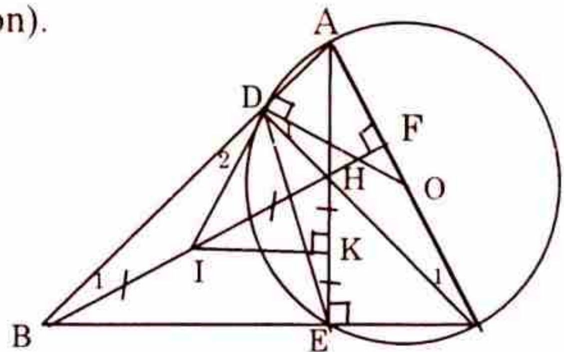
Ví dụ 18: Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{B} = 45^0$. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1 Chứng minh AE = EB.

2. Gọi H là giao điểm của CD và AE. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Giải



1. $\widehat{AEC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{AEB} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

Theo giả thiết $\widehat{ABE} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta$ AEB là tam giác vuông cân tại E

$\Rightarrow$ EA = EB.

2. Gọi K là trung điểm của HE (1); I là trung điểm của HB $\Rightarrow$ IK là đường trung bình của tam giác HBE

$\Rightarrow$ IK // BE mà $\widehat{AEC} = 90^0$ nên $BE \perp HE$ tại E $\Rightarrow IK \perp HE$ tại K (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ IK là trung trực của HE. Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. Theo trên I thuộc trung trực của HE $\Rightarrow$ IE = IH mà I là trung điểm của BH $\Rightarrow$ IE = IB. $\widehat{ADC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BDH} = 90^0$ (kề bù $\widehat{ADC}$) $\Rightarrow$ tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) $\Rightarrow$ ID= $\frac{1}{2}$BH hay ID = IB

$\Rightarrow$ IE = IB = ID

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có ΔODC cân tại O (vì OD và OC là bán kính) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1$ (3)

ΔIBD cân tại I (vì ID và IB là bán kính) $\Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1$ (4)

Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC $\Rightarrow$ H là trực tâm của tam giác ABC $\Rightarrow$ BH cũng là đường cao của tam giác ABC

$\Rightarrow BH \perp AC$ tại F $\Rightarrow \Delta AEB$ có $\widehat{AFB} = 90^0$

Theo trên ΔADC có $\widehat{ADC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$)(5).

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ mà $\widehat{D}_2 + \widehat{IDH} = \widehat{BDC} = 90^0$

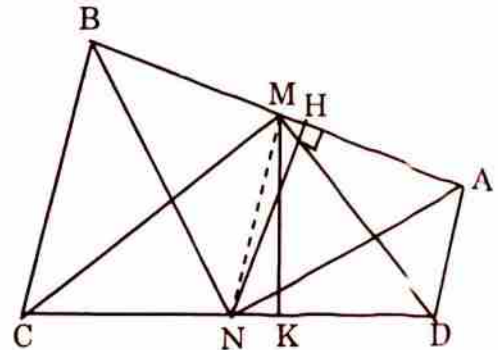
$\Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{IDH} = 90^0 = \widehat{IDO} \Rightarrow OD \perp ID$ tại D $\Rightarrow$ OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Ví dụ 19: Giả sử tứ giác ABCD có đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường thẳng CD. Chứng minh rằng nếu AD // CB thì đường tròn đường kính CD tiếp xúc với đường thẳng AB.

HSG lớp 9, quận Cầu Giấy Hà Nội, 2005 - 2006

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Kẻ MH, MK lần lượt vuông góc với AB, CD. Nếu AB // CD thì ABCD là hình thang có MN là đường trung bình, MN // AB // CD.



Suy ra $S_{MAD} = S_{NAD}; S_{MBC} = S_{NBC}$

$\Rightarrow S_{NAB} = S_{ABCD} - S_{NAD} - S_{NBC}$

$= S_{ABCD} - S_{MAD} - S_{MBC} = S_{MCD}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB.NH = \frac{1}{2}.CD.MK.$

Mặt khác, đường tròn đường kính AB tiếp xúc với CD nên:

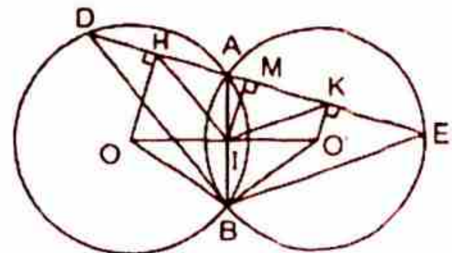
$MA = MB = MK = \frac{1}{2}AB$. Suy ra $NH = \frac{1}{2}CD = ND = NC$.

$\Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính CD.Ta lại có NH vuông góc với AB nên AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD.

Dạng 4. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O), (O') có cùng bán kính, cắt nhau tại A và B. Kẻ cát tuyến chung DAE của hai đường tròn. $D \in (O)$, E(O'). Chứng minh rằng BD = BE.

Giải



Gọi I là giao điểm của AB và OO'.

Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau, $OO' \perp AB$ và AI = IB.

Tam giác BOO' cân tại B, BI là đường cao nên IO = IO'.

Kẻ OH, IM, O'K vuông góc với DE. Ta có OH // IM // O'K và OI = IO' nên theo tính chất đường thẳng song song cách đều, ta có HM = MK.

Tam giác IHK có đường cao M là đường trung tuyến nên HI = IK. Ta lại có HI là đường trung bình của tam giác ABD, IK là đường trung bình của tam giác ABE nên $HI = \frac{BD}{2}, IK = \frac{BE}{2}$. Vậy BD = BE.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại A và B. Dây AB là cạnh của hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn O và là cạnh của tam giác đều ABE nội tiếp đường tròn tâm O'. Biết bán kính của đường tròn nhỏ là R. Chứng minh (O) là đường tròn lớn và tính bán kính (O).
OA cắt BO' tại I. Tính OI.

Giải

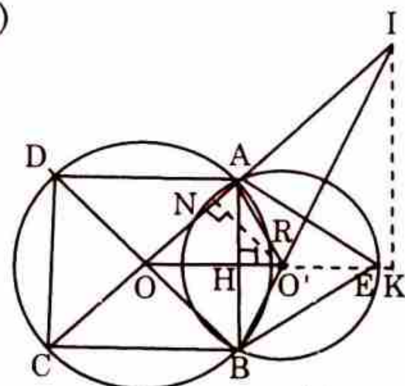
Trường hợp O, O' ở hai phía AB.

Nối OO' cắt AB tại H' ⇒ OO' là trung trực của AB

$\widehat{AOB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AOO'} = 45^0; \widehat{AO'B} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AO'O} = 60^0$

Do đó OA > O'A. O'A = R (gt), AB là cạnh của tam giác đều nội tiếp (O'; R) $\Rightarrow AB = R\sqrt{3}$. Gọi bán kính của đường tròn (O) là R_1, AB là cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O; R_1)$

$\Rightarrow AB = R_1\sqrt{2} \Rightarrow R\sqrt{3} = R_1\sqrt{2} \Leftrightarrow R_1 = \frac{R\sqrt{6}}{2}$.



AB là cạnh hình vuông nội tiếp $\left(O; \frac{R\sqrt{6}}{2}\right)$,

OH là trung đoạn $\Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{6}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

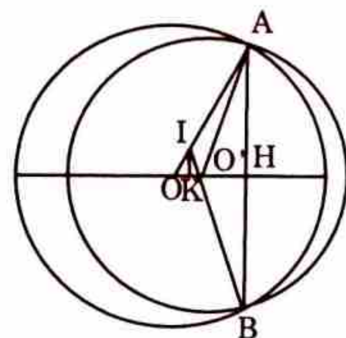
AB là cạnh tam giác nội tiếp (O';R), O'H là trung đoạn $\Rightarrow O'H = \frac{R}{2}$.

Do đó $O'O = OH + O'H = \frac{R\sqrt{3} + R}{2} = \frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}$

Vẽ IK ⊥ OO' (K ∈ OO'), ΔKOI vuông cân tại K ⇒ OK = KI,

$OI = OK\sqrt{2}$. ΔO'KI là nửa tam giác đều $\Rightarrow O'K = \frac{KI\sqrt{3}}{2}$

Ta có OO' + O'K = KI $\Rightarrow KI - \frac{KI\sqrt{3}}{3} = OO'$



$IK\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}$

Do đó $OI = \frac{R\sqrt{6}(2+\sqrt{3})}{2}$.

Trường hợp O, O' ở về một phía AB.

Tương tự, ta có: OA > O'A; $OA = \frac{R\sqrt{6}}{2}; OI = \frac{R\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{2}$

Dạng 5: Chứng minh góc nội tiếp. Quỹ tích cung chứa góc

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O; r) và hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm bất kì trên cung nhỏ BD ($E \neq B$; $E \neq D$) EC cắt AB ở M, EA cắt CD ở N.

a. Hai tam giác AMC và ANC có quan hệ với nhau như thế nào? Vì sao?

b. Chứng minh $AM.CN = 2r^2$

c. Giả sử AM = 3MB. Tính tỉ số $\dfrac{CN}{ND}$.

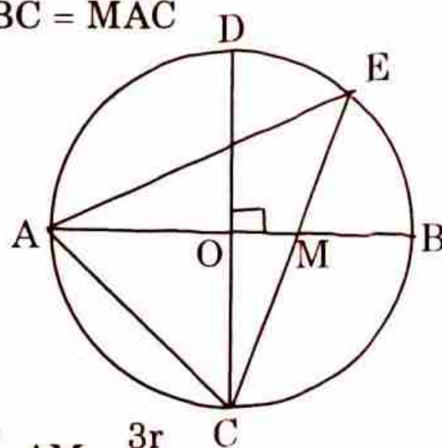
ĐTS 10 THPT Hải Phòng năm 1995 – 1996

Giải

a. Vì $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

$\widehat{NAC} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{EB} + sđ\overset{\frown}{BC}\right); \widehat{AMC} = \dfrac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{EB} + sđ\overset{\frown}{AC}\right)$

Suy ra $\widehat{NAC} = \widehat{AMC}$; $\widehat{ACN} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AD} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BC} = \widehat{MAC}$



Do đó $\Delta AMC \sim \Delta CAN$

b. $\Delta AMC \sim \Delta CAN$ nên $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AC}{CN}$

$\Rightarrow AM.CN = AC^2$

Theo định lý Py-ta-go, có:

$AC^2 = AO^2 + OC^2$ hay $AC^2 = 2r^2$.

Do đó $AM.CN = 2r^2$

c. Ta có $AM + BM = 2r$ nên $4MB = 2r \Rightarrow MB = \dfrac{r}{2}; AM = \dfrac{3r}{2}$

Do đó $AM.CN = AC^2 \Rightarrow \dfrac{3r}{2}.CN = 2r^2 \Rightarrow CN = \dfrac{4r}{3}$

Vì $CN + ND = 2r$ nên $ND = 2r - \dfrac{4r}{3} = \dfrac{2r}{3}$. Vậy $\dfrac{CN}{ND} = 2$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn tâm O đường kính AB và dây cung CD (C, D không trùng với A,B). Gọi M là giao điểm các tiếp tuyến của đường tròn tại C, D; N là giao điểm của các dây cung AC, BD. Đường thẳng đi qua N vuông góc với NO cắt DA, BC lần lượt tại E, F. Chứng minh:

a. MN vuông góc với AB. b. NE = NF.

Giải

a. Gọi P là giao điểm của AD và BC

$\Rightarrow$ N là trực tâm của tam giác PAB $\Rightarrow PN \perp AB$.

Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại D với PN là M'.

Do $\widehat{PDM'} = \widehat{ABD}\left(= \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AD}\right)$

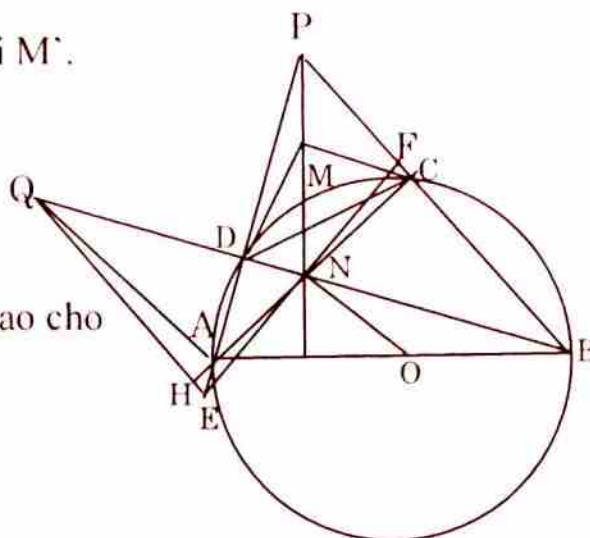
$\Rightarrow \widehat{PDM'} = \widehat{DPM'} \Rightarrow \Delta M'PD$ cân tại M'.

$\Rightarrow M'P = M'D$

$\Rightarrow$ M' là trung điểm đoạn PN.

Do đó M' trùng M

$\Rightarrow MN \perp AB$.



b. Trên tia đối của tia DB lấy điểm Q sao cho $DQ = DB \Rightarrow QA // NO \Rightarrow QA \perp NE$

$\Rightarrow$ A là trực tâm tam giác QEN.

$\Rightarrow NA \perp QE$ (tại H)

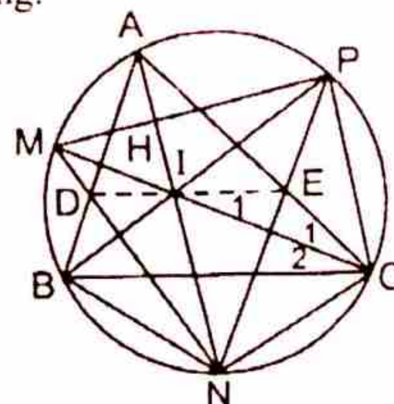
$\Rightarrow \Delta HNQ = \Delta CNB \Rightarrow NH = NC$

$\Rightarrow \Delta HNE = \Delta CNF \Rightarrow NE = NF$

Ví dụ 3: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC

Giải

Cách 1. BP cắt CM tại I. Ta có A, I, N thẳng hàng.



$\widehat{PIC} = \widehat{PCI}$ (xét cung bị chắn) nên PI = PC.

Tương tự NI = NC.

Do đó PN là đường trung trực của IC

$\Rightarrow IE = CE \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{I}_1$.

Ta lại có $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ nên $\hat{I}_1 = \hat{C}_2$, do đó IE // BC.

Chứng minh tương tự, ID // BC.

Suy ra D, I, E thẳng hàng và DE // BC.

Cách 2: (không dùng đến điểm I)

NE là đường phân giác của $\Delta ANC \Rightarrow \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AN}{NC}$ (1)

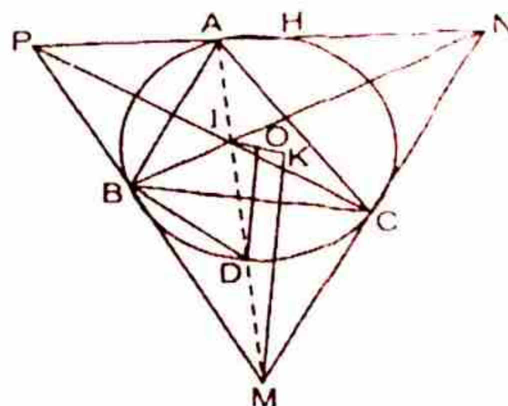
ND là đường phân giác của $\Delta ANB \Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AN}{NB}$ (2)

Dễ dàng chứng minh được NB = NC (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AD}{DB}$, do đó DE // BC.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó; M, N, P theo thứ tự là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh rằng K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Giải



Gọi D là giao điểm của AM với đường tròn (O). Chứng minh các tam giác DBI, DBM cân suy ra DI = DM.

Do đó OD là đường trung bình của ΔMIK, suy ra KM = 2OD = 2R.

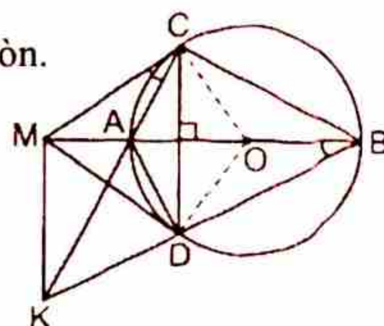
Vậy M thuộc đường tròn (K; 2R).

Tương tự đối với các điểm N và P.

Ví dụ 5: Từ điểm M ở bên ngoài đường tròn tâm O, kẻ cát tuyến MAB đi qua O và các tiếp tuyến MC, MD. Gọi K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a. Bốn điểm B, C, M, K thuộc cùng một đường tròn.

b. MK vuông góc với AB.



Giải

a. Dễ dàng chứng minh $AB \perp CD$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$, do đó $\widehat{ACM} = \widehat{ABD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Tức là $\widehat{KCM} = \widehat{KBM}$. Tứ giác BCMK có các điểm B và C cùng nhìn KM dưới hai góc bằng nhau nếu bốn điểm B. C, M, K thuộc cùng một đường tròn.

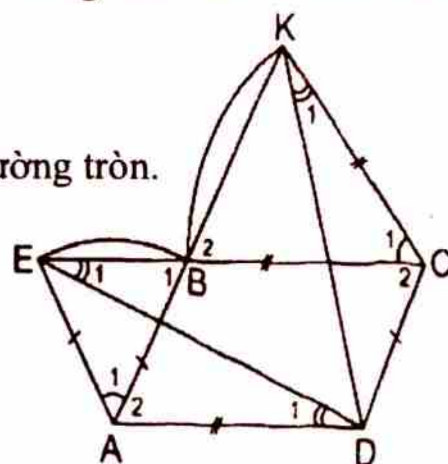
b. Từ câu a suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{BCK} = 90^0$. Vậy $KM \perp AB$.

Ví dụ 6: Cho hình bình hành ABCD có $A < 90^0$. Đường tròn tâm A bán kính AB cắt đường thẳng BC ở điểm thứ hai E. Đường tròn tâm C bán kính CB cắt đường thẳng AB ở điểm thứ hai K.

Chứng minh rằng:

a. DE = DK;

b. Năm điểm A, D, C, K, E thuộc cùng một đường tròn.



Giải

a. Các tam giác cân ABE, CBK có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$. Ta lại có $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{DAE} = \widehat{KCD}$.

$\Delta DAE = \Delta KCD$ (c.g.c) nên DE = DK.

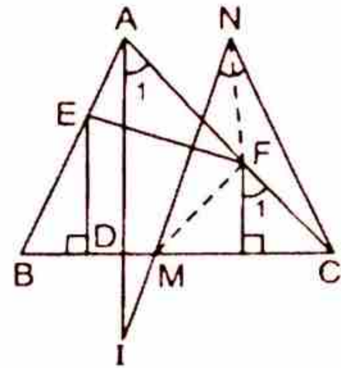
b. $\Delta DAE = \Delta KCD$ nên $\widehat{D}_1 = \widehat{K}_1$, mà $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$ nên $\widehat{K}_1 = \widehat{E}_1$. Suy ra D, E, K, C thuộc cùng một đường tròn (1).

Mặt khác $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$ nên A, E, K, C thuộc cùng một đường tròn. (2)

Từ (1), (2) suy ra năm điểm A, E, K, C, D cùng thuộc đường tròn đi qua E, K, C.

Ví dụ 7: Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AD, điểm M nằm giữa B và C. Đường trung trực của BM cắt AB ở E, đường trung trực của CM cắt AC ở F. Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua EF, I là giao điểm của NM và AD. Chứng minh rằng năm điểm A, B, I, C, N thuộc cùng một đường tròn.

Giải



Ta có: FC = FM = FN nên đường tròn (F; FC) đi qua C, M, N. Góc CNM là góc nội tiếp của đường tròn (F) nên $\widehat{CNM} = \widehat{F}_1 = \widehat{A}_1$.

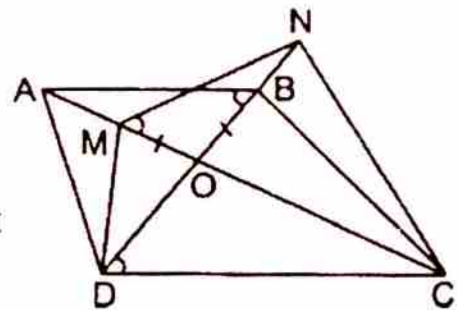
Do đó A, N, C, I thuộc cùng một đường tròn. Vậy năm điểm A, B, I, C, N thuộc cùng một đường tròn.

Ví dụ 8: Cho hình thang ABCD (AB // CD), O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia OA lấy điểm M sao cho OM = OB. Trên tia OB lấy điểm N sao cho ON = OA. Chứng minh rằng :

a. Bốn điểm D, M, N, C thuộc cùng một đường tròn;

b. $\widehat{ACN} = \widehat{BDM}$.

Giải



a. $\Delta OMN = \Delta OBA$ (c.g.c) nên $\widehat{OMN} = \widehat{OBA}$.

Ta lại có $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$

Do đó bốn điểm D, M, N, C thuộc cùng một đường tròn (dựa vào cung chứa góc).

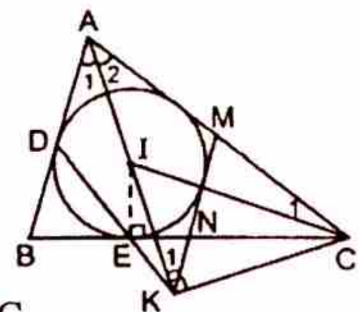
b. Suy ra từ câu a.

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC (AC > AB). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với AB, BC Ở D, E. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, BC. Gọi K là giao điểm của MN và AI. Chứng minh rằng :

a. Bốn điểm I, E, K, C thuộc cùng một đường tròn;

b. Ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Giải



a. MN // AB $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow$ KM = AM = MC

$\Rightarrow \widehat{AKC} = 90^0$.

Ta có $\widehat{IEC} = 90^0$.

Suy ra I, E, K, C thuộc đường tròn có đường kính IC.

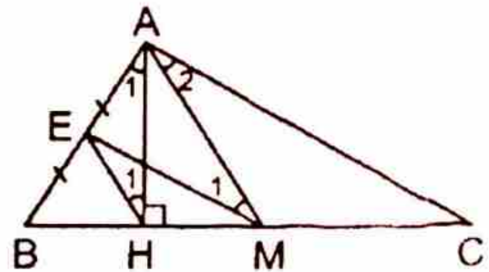
b. Từ câu a suy ra $\widehat{CEK} = \widehat{CKI} = \widehat{A}_2 + \widehat{C}_1 = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = 90^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2}$ (1)

Mặt khác, ΔBED cân $\Rightarrow \widehat{BED} = 90^0 - \dfrac{\widehat{B}}{2} \Rightarrow \widehat{CED} = 90^0 + \dfrac{\widehat{B}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CEK} + \widehat{CED} = 180^0$, do đó D, E, K thẳng hàng.

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC đường cao AH, đường trung tuyến AM (H, M phân biệt và thuộc cạnh BC) thoả mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 90^0$.

Giải



Gọi E là trung điểm của AB.

Ta có $\widehat{H}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{M}_1$ nên bốn điểm A, M, H, E thuộc cùng một đường tròn.

Suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^0$.

Do EM // AC nên $\widehat{BAC} = 90^0$.

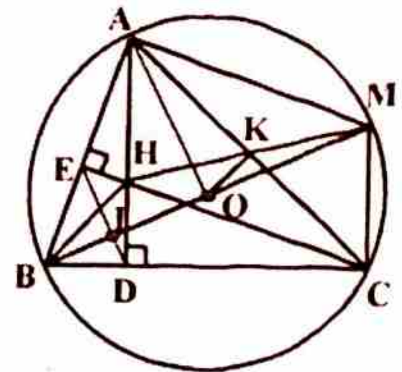
Dạng 6: Chứng minh tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp

Ví dụ 1. Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với hai đường cao AD và CE cắt nhau tại trực tâm H. Kẻ đường kính BM của (O). Gọi I là giao điểm của BM và DE, K là giao điểm của AC và HM.

a. Chứng minh rằng: các tứ giác AEDC và CMID là các tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh rằng: $OK \perp AC$.

Giải



a. Theo giả thiết $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^0$.

Tứ giác AEDC có hai đỉnh kề D và E cùng nhìn đoạn AC dưới một góc 90^0 nên nội tiếp đường tròn $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$), mà $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BC}$).

Vậy $\widehat{BDE} = \widehat{BMC}$ nên tứ giác DIMC nội tiếp đường tròn.

b. BM là đường kính của (O) nên $\widehat{BAM} = \widehat{BCM} = 90^0$ (chắn nửa đường tròn). Suy ra HC // AM (cùng $\perp AB$) và HA // CM (cùng $\perp BC$) nên AMCH là hình bình hành $\Rightarrow$ K là trung điểm của đường chéo AC. Vậy $OK \perp AC$ (quan hệ đường kính và dây cung).

Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1 Chứng minh AC. AE không đổi.

2. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$.

3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

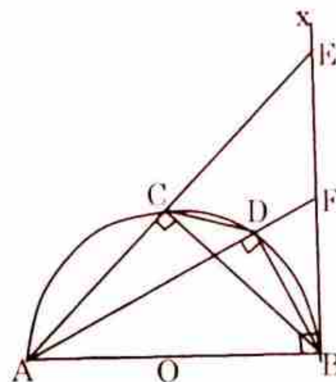
Giải

1. C thuộc nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BC \perp AE$.

$\widehat{ABE} = 90^0$ (Bx là tiếp tuyến)

⇒ tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao

⇒ $AC.AE = AB^2$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC.AE không đổi.



2. ΔADB có $\widehat{ADB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

⇒ $\widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (1)

ΔABF có $\widehat{ABF} = 90$ (BF là tiếp tuyến).

⇒ $\widehat{AFB} + \widehat{BAF} = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\widehat{ABD} = \widehat{DFB}$ (cùng phụ với $\widehat{BAD}$)

3. Tứ giác ACDB nội tiếp (O) ⇒ $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180^0$.

$\widehat{ECD} + \widehat{ACD} = 180^0$ (vì là hai góc kề bù)

⇒ $\widehat{ECD} = \widehat{ABD}$ (cùng bù với $\widehat{ACD}$).

Theo trên $\widehat{ABD} = \widehat{DFB} \Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{DFB}$. Mà $\widehat{EFD} + \widehat{DFB} = 180^0$ (vì là hai góc kề bù) nên suy ra $\widehat{ECD} + \widehat{EFD} = 180^0$, mặt khác $\widehat{ECD}$ và $\widehat{EFD}$ là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 3: Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

1. Chứng minh bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn
2. Gọi SI là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng tam giác PS'M cân
3. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn.

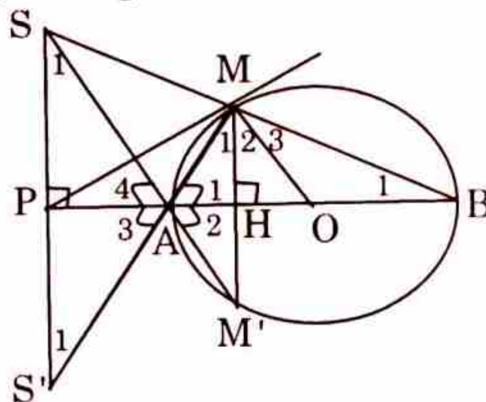
Giải

1. Ta có $SP \perp AB$ (gt) ⇒ $\widehat{SPA} = 90^0$; $\widehat{AMB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) ⇒ $\widehat{AMS} = 90^0$. Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nam trên một đường tròn.

2. Vì M' đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn ⇒ hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau ⇒ $\widehat{AMM'} = \widehat{AM'M}$ (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (l). Cũng vì M' đối xứng M qua AB nên $MM' \perp AB$ tại H

⇒ MM' // SS' (cùng vuông góc với AB)



$\Rightarrow \widehat{AMM'} = \widehat{AS'S}$; $\widehat{AM'M} = \widehat{ASS'}$ (Vì so le trong) (2).

$\Rightarrow$ Từ (l) và (2) $\Rightarrow \widehat{AS'S} = \widehat{ASS'}$

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ASP} = \widehat{AMP}$ (nội tiếp cùng chắn $\widehat{AP}$)

$\Rightarrow \widehat{AS'P} = \widehat{AMP} \Rightarrow$ tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{S'_1}$ (cùng phụ với $\hat{S}$). (3) Tam giác PMS' cân tại P $\Rightarrow \widehat{S'_1} = \widehat{M_1}$ (4)

Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB = R) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_3}$ (5).

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_3} \Rightarrow \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{M_3} + \widehat{M_2}$

mà $\widehat{M_3} + \widehat{M_2} = \widehat{AMB} = 90^0$ nên suy ra $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{PMO} = 90^0 \Rightarrow PM \perp OM$ tại M $\Rightarrow$ PM là tiếp tuyến của đường tròn lại M

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F. BF cắt (O) tại I. DI cắt BC tại M. Chứng minh

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.
2. DF // BC.
3. Tứ giác BDFC nội tiếp.
4. $\dfrac{BD}{CB} = \dfrac{BM}{CF}$

Giải

1. (HD) Theo tích chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF

$\Rightarrow$ tam giác ADF cân tại A

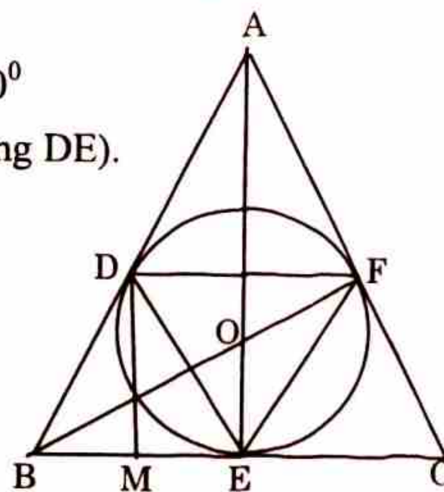
$\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{AFD} < 90^0 \Rightarrow$ sđ cung DF < 180^0

$\Rightarrow \widehat{DEF} < 90^0$ (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có:

$\widehat{DFE} < 90^0$; $\widehat{EDF} < 90^0$.

Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.



2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow$ DF // BC.

3. DF // BC $\Rightarrow$ BDFC là hình thang lại có $\hat{B} = \hat{C}$ (vì tam giác ABC cân)

$\Rightarrow$ BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn.

4. Xét hai tam giác BDM và CBF. Ta có $\widehat{DBM} = \widehat{BCF}$ (hai góc đáy của tam giác cân). $\widehat{BDM} = \widehat{BFD}$ (nội tiếp cùng chắn cung DI);

$\widehat{CBF} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{CBF}$. $\Rightarrow \Delta BDM = \Delta CBF \Rightarrow \dfrac{BD}{CB} = \dfrac{BM}{CF}$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A.Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E. Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1 Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.

2. BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Chứng minh AE. AB = AF. AC.

4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

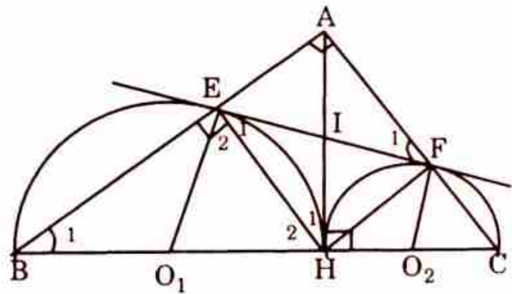
Giải

1. Ta có : $\widehat{BEH} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AEH} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1) $\widehat{CFH} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AFH} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2) $\widehat{EAF} = 90^0$ (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3).

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{H_1}$ (nội tiếp chắn cung AE) theo giả thiết $AH \perp BC$ nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và $(O_2) \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{H_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)



$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{EFC} = \widehat{AFE} + \widehat{EFC}$ mà $\widehat{AFE} + \widehat{EFC} = 180^0$ (vì là hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{EFC} = 180^0$

Mặt khác $\widehat{EBC}$ và $\widehat{EFC}$ là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. ***Cách 1:***Xét hai tam giác AEF và ACB ta có $\widehat{A} = 90^0$ là góc chung; $\widehat{AFE} = \widehat{ABC}$ (theo chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB} \Rightarrow AE.AB = AF.AC.$

Cách 2:Tam giác AHB vuông tại H có $HE \perp AB$

$\Rightarrow$ AH= AE.AB(*).Tam giác AHC vuông tại H có $HF \perp AC$

$\Rightarrow$ AH = AF.AC (**). Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật $\Rightarrow$ IE = IH

$\Rightarrow \Delta IEH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{H_1}$; ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E và O_1H cùng là bán kính)

$\Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{H_2} \Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{H_1} + \widehat{H_2}$ mà $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = \widehat{AHB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \widehat{O_1EF} = 90^0 \Rightarrow O_1E \perp EF$. Chứng minh tương tự ta cũng có $O_2F \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

Ví dụ 6: Cho tam giác cân ABC (AB = AC, $\widehat{A} < 90^0$), một cung tròn BC nằm bên trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AB, CA. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.

a. Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được.

b. Chứng minh rằng tia đối của tia MI là phân giác góc HMK.

c. Chứng minh rằng tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra PQ song song với BC.

d. Gọi (O_1) là đường tròn qua M, P, K, (O_2) là đường tròn qua M, Q, H; N là giao điểm thứ hai của (O_1),(O_2) và D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng M, N, D thẳng hàng.

ĐTS 10 THPT Hà Nội năm 1994 – 1995

Giải

a. $\widehat{MIB} = 90^0, \widehat{MKB} = 90^0$ ($MI \perp BC$, $MK \perp AB$). Do đó tứ giác BIMK nội tiếp được đường tròn.Tương tự ta cũng có tứ giác MICH nội tiếp được đường tròn.

b. AB = AC (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

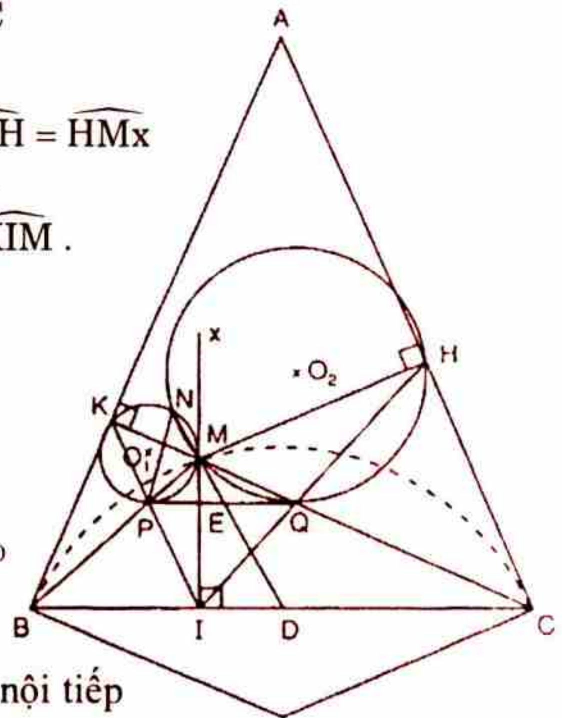
Gọi tia đối của tia MI là Mx, các tứ giác BIMK, MICH nội tiếp nên:

$\widehat{IMH} = 180^0 - \widehat{ACB}; \widehat{IMK} = 180^0 - \widehat{ABC}$

Do đó: $\widehat{IMH} = \widehat{IMK}$

Suy ra $\widehat{KMx} = 180^0 - \widehat{IMK} = 180^0 - \widehat{IMH} = \widehat{HMx}$

Vậy Mx là tia phân giác của góc HMK.



c. Theo kết quả của câu a. ta có: $\widehat{KBM} = \widehat{KIM}$.

Mà $\widehat{KBM} = \widehat{BCM}\left(= \frac{1}{2} sđ\widehat{BM}\right)$.

Suy ra $\widehat{KIM} = \widehat{BCM}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$\widehat{HIM} = \widehat{CBM}$

ΔMBC có: $\widehat{BCM} + \widehat{CBM} + \widehat{BMC} = 180^0$

Do đó: $\widehat{KIM} + \widehat{HIM} + \widehat{PMQ} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{PIQ} + \widehat{PMQ} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác MPIQ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MIH} \Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MBC} \Rightarrow PQ \,//\, BC$.

d. Vẽ Py là tia tiếp tuyến của đường tròn (O_1) (tia Py nằm trên nửa mặt phẳng bờ PM không chứa điểm K).

Ta có: $\widehat{KPM} = \widehat{MPQ}\left(= \frac{1}{2} sđ\widehat{PM}\right)$ mà $\widehat{KPM} = \widehat{MPQ}$

Do đó: $\widehat{MPy} = \widehat{MPQ} \Rightarrow$ Hai tia Py và PQ trùng nhau $\Rightarrow$ PQ là tiếp tuyến của (O_1). Chứng minh tương tự, có PQ là tiếp tuyến của (O_2).

Gọi E là giao điểm của MN và PQ: $\Delta EPM \sim \Delta EPN$ ($\widehat{PEM}$ chung và $\widehat{EPM} = \widehat{PNE} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{PM}$) $\Rightarrow \frac{EM}{EP} = \frac{EP}{EN} \Rightarrow EP^2 = EM.EN$.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $EQ^2 = EM.EN$

Suy ra $EP^2 = EQ^2 \Rightarrow EP = EQ \Rightarrow$ E là trung điểm PQ.

Gọi E' là giao điểm của MP và PQ. Tam giác MBD có

$PE' // BD \Rightarrow \frac{PE'}{BD} = \frac{ME'}{MD}$. Tương tự ta có: $\frac{EQ}{CD} = \frac{ME'}{MD}$ mà BD = CD (gt)

Suy ra $PE' = E'Q \Rightarrow$ E' là trung điểm PQ.

Vậy: $E \equiv E'$. Do đó P, E, M, N thẳng hàng. Vậy M, N, D thẳng hàng.

Ví dụ 6: Cho tam giác AB (AC > AB; $\widehat{BAC} > 90^0$). I, K theo thứ tự là các trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E, tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

a. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

b. Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp được.

c. Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.

d. Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH, DE.

ĐTS 10 THPT Hà Nội năm 1995 – 1996

Giải

a. $\widehat{BDA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm I).

Tương tự cũng có:

$\widehat{ADC} = 90^0$; $AD \perp BD$ ($\widehat{BDA} = 90^0$); $AD \perp DC$ ($\widehat{ADC} = 90^0$)

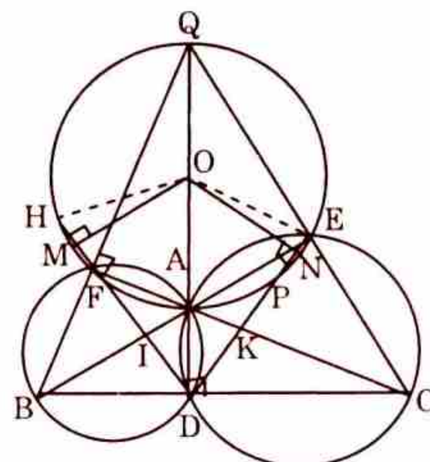
$\Rightarrow$ B, D, C thẳng hàng.

b. Ta có: $\widehat{BFC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tương tự cũng có: $\widehat{CEB} = 90^0$

E và F cùng nhìn BC dưới góc 90^0 nên B, F, E, C cùng nằm trên một đường tròn (quỹ tích cung chứa góc).

$\Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp được.



c. ΔABC có AD, BF, CE là ba đường cao (vì $AD \perp BC$, $BF \perp AC$, $CE \perp AB$).
Do đó ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.

d. Giả sử AD, BF, CE đồng quy tại Q.

$\widehat{ABF} = \widehat{ADF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AF).

$\widehat{BDQ} = \widehat{BEQ} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BQED nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QBE} = \widehat{QDE}$

Tứ giác AFQE nội tiếp $(\widehat{AFQ} = \widehat{AEQ} = 90^0) \Rightarrow O \in AQ$.

Do đó $\widehat{MDO} = \widehat{NDO}$

Xét ΔMDO $(\widehat{DMO} = 90^0)$ và ΔNDO $(\widehat{DNO} = 90^0)$ có: OD chung, $\widehat{MDO} = \widehat{NDO}$. Do đó $\Delta MDO = \Delta NDO$ (cạnh huyền góc nhọn)

$\Rightarrow$ DM = DN, OM = ON;OM = ON

$\Rightarrow$ HF = EP (P là giao điểm của DE với (O) (P không trùng E)

$HM = \frac{1}{2}HF$ (vì $OM \perp HP$), $EN = \frac{1}{2}EP$ (vì $ON \perp EP$)

Suy ra: HM = EN.Do đó: DM + HM = DN + EN $\Rightarrow$ DH = DE.

Ví dụ 7: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2r. C là trung điểm của cung AB. Trên cung AC lấy điểm F bất kì. Trên dây BF lấy điểm E sao cho BE = AF.

a. Hai tam giác AFC và BEC quan hệ với nhau như thế nào? Tại sao?

b. Chứng minh EFC là tam giác vuông cân.

c. Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn. Chứng minh BECD là một tứ giác nội tiếp.

d. Giả sử F chuyển động trên cung AC. Chứng minh rằng khi đó E chuyển động trên một cung tròn. Hãy xác định cung tròn và bán kính của cung tròn đó.

ĐTS 10 THPT Hải Phòng năm 1995 – 1996

Giải

a. AC = BC (vì C là trung điểm của cung AB) $\Rightarrow$ AC = CB.

Xét ΔAFC và ΔBEC có AC = CB; $\widehat{FAC} = \widehat{EBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FC); AF = BE.Do đó $\Delta AFC = \Delta BEC$(c.g.c)

b. $\Delta AFC = \Delta BEC \Rightarrow CE = CF$ nên ΔECF cân ở C.

Vì $\widehat{CFE} = 45^0 = \widehat{CEF}$

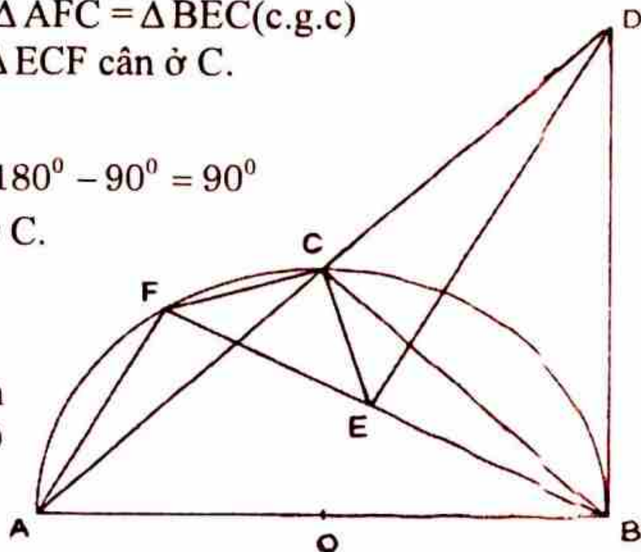
$\Rightarrow \widehat{FCE} = 180^0 - (\widehat{CFE} + \widehat{CEF}) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Do đó tam giác ECF vuông cân ở C.

c. BD là tiếp tuyến nên $BD \perp AB$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^0$

Vì $\widehat{DAB} = 45^0$ (góc nội tiếp chắn cung BC) nên tam giác BAD vuông cân tại B.



$\Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0$;

$\widehat{FEC} = 45^0$ (ΔECF vuông cân).

Tứ giác BECD có $\widehat{ADB} = \widehat{FEC} (= 45^0)$; $\widehat{ADB} + \widehat{CEB} = 180^0$ nên nội tiếp được.

d. BD cố định, E thuộc đường tròn đường kính BD.

$BD = AB = 2r$; $F \equiv A \Rightarrow E \equiv B$ và $F \equiv C \Rightarrow E \equiv C$.

Do đó suy ra rằng E chuyển động trên cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD, tâm là trung điểm BD bán kính r.

Ví dụ 8: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cắt nhau tại hai điểm I, P. Cho biết $R_1 < R_2$ và O_1, O_2 khác phía đối với đường thẳng IP. Kẻ hai đường kính IE, IF tương ứng của (O_1, R_1) và (O_2, R_2).

1. Chứng minh E, P, F thẳng hàng.
2. Gọi K là trung điểm EF. Chứng minh O_1PKO_2 là tứ giác nội tiếp.
3. Tia IK cắt (O_2, R_2) tại điểm thứ hai là B, đường thẳng vuông góc với IK tại I cắt (O_1, R_1) tại điểm thứ hai là A. Chứng minh IA = BF.

TS lớp 10 Toán – Đại học Vinh năm 2009 -2010 (vòng 1)

Giải

1. Vì IE là đường kính của (O_1, R_1) nên $\widehat{IPE} = 90^0$

   Tương tự $\widehat{IPE} = 90^0$. Từ giả thiết ta có: E, F nằm về hai phía của P. Suy ra $\widehat{EPE} = 180^0$ hay E, P, F thẳng hàng.
2. Ta có: $\Delta O_1IO_2 = \Delta O_1PO_2$ (c.c.c) nên $\widehat{O_1IO_2} = \widehat{O_1PO_2}$ (1)

   Mặt khác, O_1K, O_2K là các đường trung bình của tam giác IEF nên IO_1KO_2 là hình bình hành. Do đó $\widehat{O_1IO_2} = \widehat{O_1KO_2}$ (2)

   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{O_1PO_2} = \widehat{O_1KO_2}$, hay O_1PKO_2 là tứ giác nội tiếp.
3. IA cắt (O_2, R_2) tại điểm A' (khác I).

   Ta có tứ giác IBFA' là hình chữ nhật, nên BF = IA' (3).

   Mặt khác, IK // AE và A'F, K là trung điểm của EF nên I là trung điểm của AA'. Hay là IA = IA'. (4). Từ (3) và (4) suy ra IA = BF.

Dạng 7: Các bài toán tổng hợp

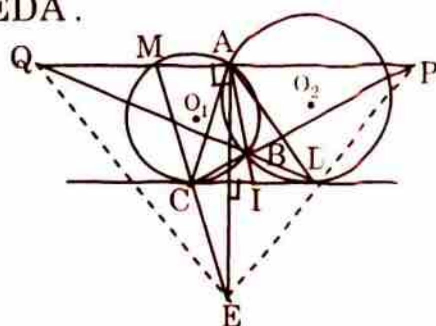
Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD, lần lượt cắt (O_1) và (O_2) tại M và N. Các đường thẳng BC, BD lần lượt cắt đường thẳng MN tại P và Q; các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

1. Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD;
2. Tam giác EPQ là tam giác cân.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hải Dương, 2004 – 2005

Giải

1. Do MN // CD nên $\widehat{EDC} = \widehat{ENA}$, mặt khác $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DA}$), suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$ hay CD là phân giác của $\widehat{EDA}$.



Tương tự, CD cũng là phân giác của $\widehat{ECA}$. Suy ra A và E đối xứng nhau qua CD (các bạn tự chứng minh)
$\Rightarrow AE \perp CD$.

2. Do PQ // CD nên $AE \perp PQ$. (*)
Gọi I là giao điểm của AB và CD thì:
$\Delta AID \sim \Delta DIB$ (chung $\widehat{AID}$ và $\widehat{IAD} = \widehat{IDB}$ do cùng chắn $\overset{\frown}{DB}$), suy ra $\dfrac{ID}{IA} = \dfrac{IB}{ID} \Rightarrow ID^2 = IA.IB$.
Tương tự, $IC^2 = IA.IB$, suy ra $IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID$. Ta có AI, CP, DQ đồng quy tại B, PQ // CD và I là trung điểm của CD, A thuộc PQ suy ra A là trung điểm của PQ.Kết hợp với (*)suy ra AE là trung trực của PQ và EPQ là tam giác cân tại E.

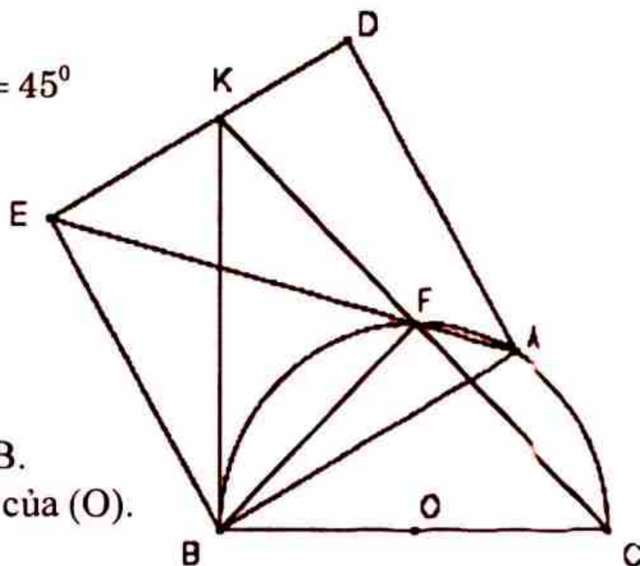
Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn đó. Dựng hình vuông ABED thuộc nửa mặt phẳng bờ AB, không chứa đỉnh C. Gọi F là giao điểm của AE và nửa đường tròn (O). Gọi K là giao điểm của CF và ED.

a. Chứng minh rằng 4 điểm E, B, F, K nằm trên một đường tròn.
b. Chứng minh rằng BK là tiếp tuyến của (O)
c. Chứng minh rằng F là trung điểm của CK.

Giải

a. Ta có $\widehat{KEB} = 90^0$. Mặt khác $\widehat{BFC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn giữa đường tròn). Do CF kéo dài cắt ED tại D $\Rightarrow \widehat{BFK} = 90^0 \Rightarrow$ E, F thuộc đường tròn đường kính BK hay 4 điểm E, F, B, K thuộc đường tròn đường kính BK.

b. $\widehat{BCF} = \widehat{BAF}$.

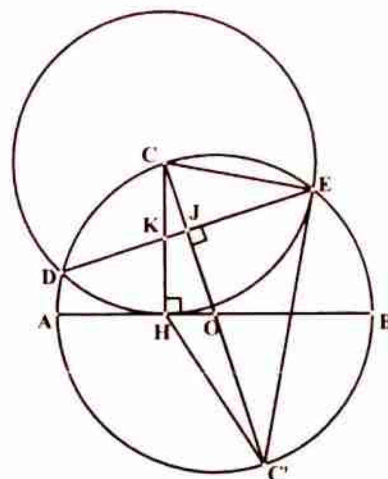


Mà $\widehat{BAF} = \widehat{BAE} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BFC} = 45^0$
Ta có $\widehat{BKF} = \widehat{BEF}$.
Mà $\widehat{BEF} = \widehat{BEA} = 45^0$ (EA là đường chéo của hình vuông ABED)
$\Rightarrow \widehat{BKF} = 45^0$.
Vì $\widehat{BKC} = \widehat{BCK} = 45^0$
$\Rightarrow$ Tam giác BCK vuông cân tại B.
$\Rightarrow BK \perp OB \Rightarrow$ BK là tiếp tuyến của (O).

c. $BF \perp CK$ tại F $\Rightarrow$ F là trung điểm.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc với AB (C khác A và B; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

Giải



Gọi K giao điểm của DE và CH

Ta có: OC ⊥ DE (tính chất đường nối tâm)

=> Δ CKJ và Δ COH đồng dạng (g–g)

=> CK.CH = CJ.CO (1)

=> 2CK.CH = CJ.2CO = CJ.CC' mà Δ CEC' vuông tại E có EJ là đường cao

=> $CJ.CC' = CE^2 = CH^2$

=> $2CK.CH = CH^2$

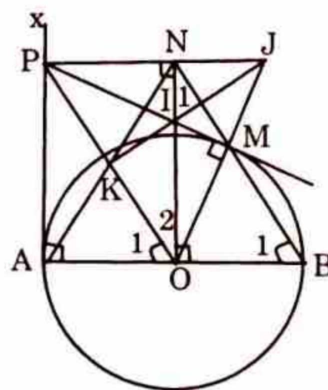
=> 2CK = CH

=> K là trung điểm của CH.

Ví dụ 4: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Giải



1. (HS tự làm)

2. Ta có $\widehat{ABM}$ nội tiếp chắn cung AM; $\widehat{AOM}$ là góc ở tâm chắn chung AM $\Rightarrow \widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2}$ (1)

OP là tia phân giác $\widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \widehat{AOP} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{AOP}$ (3)

Mà $\widehat{ABM}$ và $\widehat{AOP}$ là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có: $\widehat{PAO} = 90^0$ (vì PQ là tiếp tuyến); $\widehat{NOB} = 90^0$ (gt NO ⊥ AB)

$\Rightarrow \widehat{PAO} = \widehat{NOB} = 90^0$; OA = OB = R; $\widehat{AOP} = \widehat{OBN}$ (theo (3))

$\Rightarrow$ ΔAOP = ΔOBN $\Rightarrow$ OP = BN (5). Từ (4) và (5)

$\Rightarrow$ OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành $\Rightarrow PN // OB$ hay $PJ // AB$, mà $ON \perp AB \Rightarrow ON \perp PJ$. Ta cũng có $PM \perp OJ$ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ (6). Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $\widehat{PAO} = \widehat{AON} = \widehat{ONP} = 90^0 \Rightarrow$ K là trung điểm của PO (tích chất đường chéo hình chữ nhật) (6). AONP là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{NOP}$ (so le) (7). Theo tích chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có PO là tia phân giác $\widehat{APM} \Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{MPO}$ (8). Từ (7) và (8) $\Rightarrow \Delta IPO$ cân tại I có IK là trung tuyến đồng thời là đường cao

$\Rightarrow IK \perp PO$. (9)

Từ (6) và (9) $\Rightarrow$ I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 5: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B).Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F, tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1. Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AI^2 = IM.IB$.
3. Chứng minh BAF là tam giác cân.
4. Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
5. Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Giải

1. Ta có : $\widehat{AMB} = 90$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

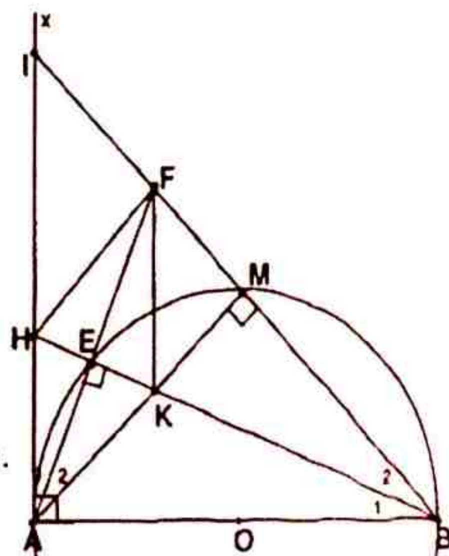
$\Rightarrow \widehat{KMF} = 90$ (vì là hai góc kề bù).

$\widehat{AEB} = 90$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{KEF} = 90$ (vì là hai góc kề bù).

$\widehat{KMF} + \widehat{KEF} = 180^0$.

Mà $\widehat{KMF}$ và $\widehat{KEF}$ là hai góc đối diện của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.



2. Ta có $\widehat{IAB} = 90$ (vì AI là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \Delta AIB$ vuông tại A có $AM \perp IB$ (theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao

$\Rightarrow AI^2 = IM.IB$.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM

$\Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{MAE} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$; $\widehat{ABE} = \widehat{MBE}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow$ BE là tia phân giác góc ABF. (1).

Theo trên ta có BE là đường cao của tam giác ABF (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BAF là tam giác cân tại B.

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow$ E là trung điểm của AF. (3). Từ $BE \perp AF \Rightarrow AF \perp HK$ (4). theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác $\widehat{HAK}$ (5). Từ (4) và (5) $\Rightarrow$HAK là tam giác cân tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow$E là trung điểm của HK. (6). Từ (3), (4) và (6) $\Rightarrow$AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).
5. Theo trên AKFH là hình thoi $\Rightarrow$HA // FH hay IA // FK $\Rightarrow$tứ giác AKFI là hình thang. Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân. AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.Thật vậy: M là trung điểm của cung AB

   $\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MAI} = 45^0$ (tích chất góc nội tiếp) (7).

   Tam giác ABI vuông tại A có $\widehat{ABI} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AIB} = 45^0$ (8).

   Từ (7) và (8) $\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{AIF} = 45^0$

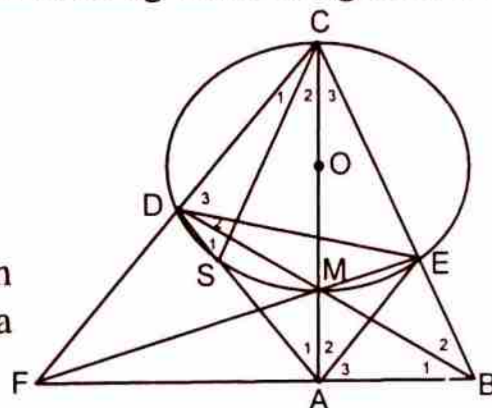
   $\Rightarrow$ AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau). Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính
MC, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Giải

1. Ta có $\widehat{CAB} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CDB} = 90$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC $\Rightarrow$ ABCD là tứ giác nội tiếp.



2. ***Trường hợp 1:***ABCD là tứ giác nội tiếp

   $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_3$ (nội tiếp cùng chắn cung AB).

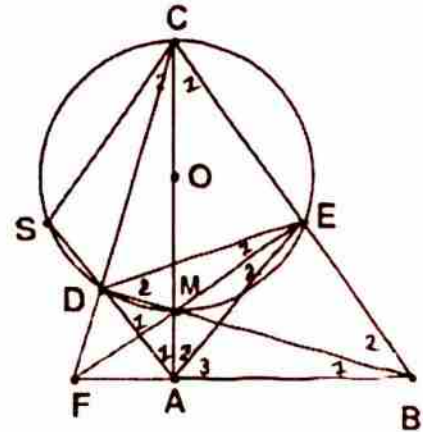
   $\hat{D}_1 = \hat{C}_3 \Rightarrow$ SM = EM

   $\Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{C}_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)$\Rightarrow$ CA là tia phân giác của góc SCB.

Trường hợp 2: $\widehat{ABC} = \widehat{CME}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$); $\widehat{ABC} = \widehat{CDS}$ (cùng bù $\widehat{ADC}$
$\Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{CDS} \Rightarrow CE = CS \Rightarrow SM = EM \Rightarrow \widehat{SCM} = \widehat{ECM} \Rightarrow$ CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB ta có $BA \perp CM$; $CD \perp BM$; $ME \perp BC$ như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BI, EM, CD đồng quy.

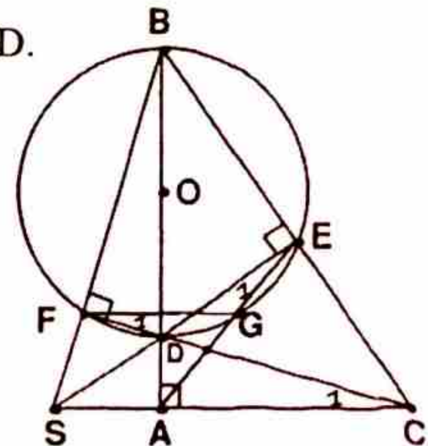
4. Theo trên ta có SM = EM $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$
$\Rightarrow$ DM là tia phân giác của góc ADE.(1)



5. Ta có $\widehat{MEC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{MEB} = 90^0$.
Tứ giác AMEB có $\widehat{MAB} = 90^0$; $\widehat{MEB} = 90^0$
$\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{MEB} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn $\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$.
Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (nội tiếp cùng chắn cung CD)
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow$ AM là tia phân giác của góc DAE (2).
Từ (l) và (2) ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F. G. Chứng minh :

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp.
3. AC// FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.



Giải

1. Xét hai tam giác ABC và EDB
Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{DEB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
$\Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{BAC} = 90^0$; lại có $\widehat{ABC}$ là góc chung $\Rightarrow \Delta DEB \sim \Delta CAB$.

2. Theo trên $\widehat{DEB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DEC} = 90^0$ (vì hai góc kề bù); $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì ΔABC vuông tại A) hay $\widehat{DAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DEC} + \widehat{DAC} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp.

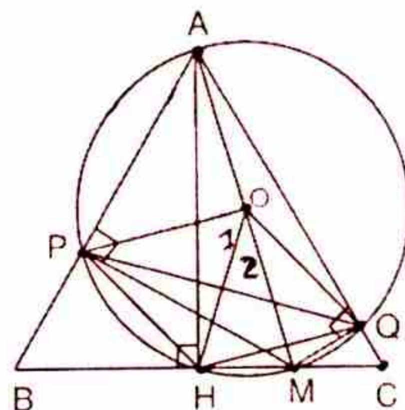
* $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\widehat{DFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{BFC} = 90^0$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC $\Rightarrow$ AFBC là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}_1$ lại có $\hat{E}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{C}_1$, mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Ví dụ 8: Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B, C, H); từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.
3. Chứng minh $OH \perp PQ$.



Giải

1. Ta có $MP \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{APM} = 90^0$; $MQ \perp AC$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{AQM} = 90^0$ như

Vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính $AM \Rightarrow$ APMQ là tứ giác nội tiếp.

Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IPMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.MP$.

Tam giác ACM có MQ là đường cao $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.MQ$.

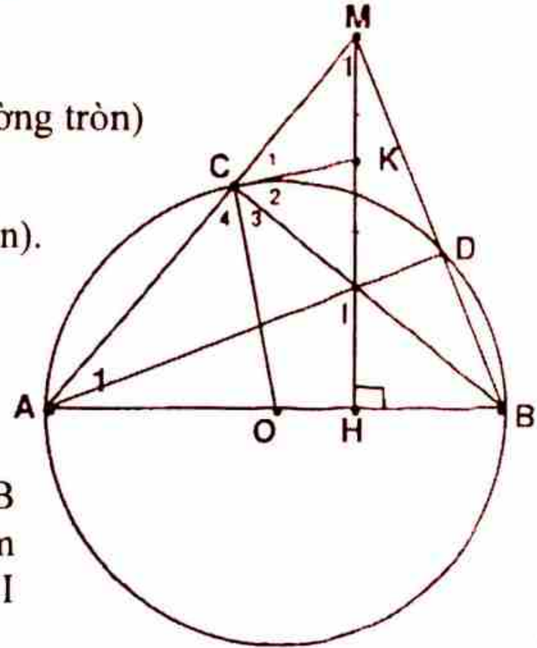
Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB.MP + \frac{1}{2}AC.MQ = \frac{1}{2}BC.AH$

$\Rightarrow AB.MP + AC.MQ = BC.AH$. Mà AB = BC = CA (vì tam giác ABC đều) $\Rightarrow$ MP + MQ = AH.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{HAP} = \widehat{HAQ} \Rightarrow HP = HQ$ (tính chất góc nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{HOP} = \widehat{HOQ}$ (tính chất góc ở tâm) $\Rightarrow$ OH là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao $\Rightarrow OH \perp PQ$.

Ví dụ 9: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh các đường thẳng AD. BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID. Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp.



Giải

1. Ta có: $\widehat{ACB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{MCI} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

$\widehat{ADB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{MDI} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{MCI} + \widehat{MDI} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo trên Ta có $BC \perp MA$; $AD \perp MB$ nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB.

Theo giả thiết thì $MH \perp AB$ nên MH cũng là đường cao của tam giác MAB $\Rightarrow$ AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. ΔOAC cân tại O (vì OA và OC là bán kính) $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_4$

ΔKCM cân tại K (vì KC và KM là bán kính) $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}_1$

Mà $\widehat{A}_1 + \widehat{M}_1 = 90^0$ (do tam giác AHM vuông tại H)

$\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{C}_4 = 90^0 \Rightarrow \widehat{C}_3 + \widehat{C}_2 = 90^0$ (vì góc ACM là góc bẹt) hay $\widehat{OCK} = 90^0$.

Xét tứ giác KCOH

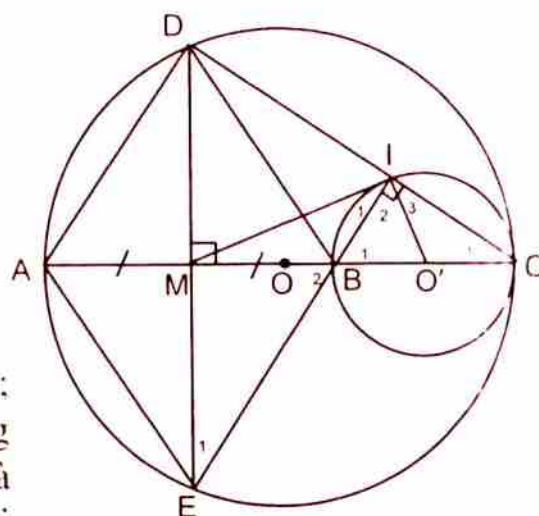
Ta có $\widehat{OHK} = 90^0$; $\widehat{OCK} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{OHK} + \widehat{OCK} = 180^0$ mà $\widehat{OHK}$ và $\widehat{OCK}$ là hai góc đối nên KCOH là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 10: Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, kẻ BI vuông góc với CD.

1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp.
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O').

Giải



1. $\widehat{BIC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

   $\Rightarrow \widehat{BID} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù);

   $DE \perp AB$ tại M $\Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0$

   $\Rightarrow \widehat{BID} + \widehat{BMD} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB: $DE \perp AB$ tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow$ Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. $\widehat{ADC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ $AD \perp DC$; theo trên $BI \perp DC \Rightarrow BI \parallel AD$.

4. Theo giả thiết ADBE la hình thoi $\Rightarrow EB \parallel AD$ (2).
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I $\Rightarrow$ IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) $\Rightarrow$ MI = ME $\Rightarrow \Delta$MIE cân tại M $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{E}_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O I cùng là bán kính) $\Rightarrow \hat{I}_3 = \hat{C}_1$ mà $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ (cùng phụ với góc EDC) $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{I}_3 \Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{I}_3 + \hat{I}_2$. Mà $\hat{I}_3 + \hat{I}_2 = \widehat{BIC} = 90^0$ $\Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 90^0 = \widehat{MIO'}$ hay $MI \perp OI$ tại I $\Rightarrow$ MI là tiếp tuyến của (O').

Ví dụ 11: Cho đường tròn (O; R) và (O'; R) có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC vót (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1 Tứ giác MDGC nội tiếp.

2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Tứ giác ADBE là hình thoi.

4. B, E, F thẳng hàng.

5. DF, EG, AB đồng quy.

6. $MF = \frac{1}{2}DE$.

7. MF là tiếp tuyến của (O').

Giải

1. $\widehat{BGC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa (đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CGD} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). Theo giả thiết $DE \perp AB$ tại M $\Rightarrow \widehat{CMD} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CGD} + \widehat{CMD} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

2. $\widehat{BFC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BFD} = 90^0$; $\widehat{BMD} = 90^0$ (vì $DE \perp AB$ tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD $\Rightarrow$ M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn.

D G A M C O' B O 1 1 2 3 1 1 F E

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; $DE \perp AB$ tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow$ Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

4. $\widehat{ADC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AD \perp DF$; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi $\Rightarrow$ BE // AD mà $AD \perp DF$ nên suy ra $BE \perp DF$. Theo trên $\widehat{BFC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BF \perp DF$ mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đó B, E, F thẳng hàng.

5. Theo trên $DF \perp BE$; $BM \perp DE$ mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE $\Rightarrow$ EC cũng là đường cao $\Rightarrow EC \perp BD$; theo trên $CG \perp BD \Rightarrow$ E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy.

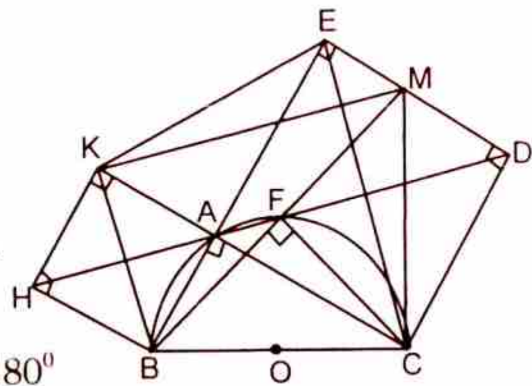
6. Theo trên $DF \perp BE \Rightarrow \Delta DEF$ vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra $MF = \frac{1}{2}DE$ (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. Theo trên $MF = \frac{1}{2}DE \Rightarrow MD = MF \Rightarrow \Delta MDF$ cân tại $M \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{F}_1$; $\Delta O'BF$ cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) $\Rightarrow \hat{F}_3 = \hat{B}_1$ mà $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (Cùng phụ với $\widehat{DEB}$) $\Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{F}_3 \Rightarrow \hat{F}_1 + \hat{F}_2 = \hat{F}_3 + \hat{F}_2$. Mà $\hat{F}_3 + \hat{F}_2 = \widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow \hat{F}_1 + \hat{F}_2 = 90^0 = \widehat{MFO'}$ hay $MF \perp O'F$ tại F $\Rightarrow$ MF là tiếp tuyến của (O').

Ví dụ 12: Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F. chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\widehat{ABC} > 45^0$, gọi M là giao điểm của BF và ED. Chứng minh 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải



1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông

$\Rightarrow \widehat{BAH} = 45^0$.

Tứ giác AEDC là hình vuông

$\Rightarrow \widehat{CAD} = 45^0$; tam giác ABC vuông ở A

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có $\widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1). $\widehat{FBC} = \widehat{FAC}$ (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên $\widehat{CAD} = 45^0$ hay $\widehat{FAC} = 45^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra FBC là tam giác vuông cân lại F.

3. Theo trên $\widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CFM} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); $\widehat{CDM} = 90^0$ (tích chất hình vuông) $\Rightarrow \widehat{CFM} + \widehat{CDM} = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra $\widehat{CDF} = \widehat{CMF}$, mà $\widehat{CDF} = 45^0$ (vì AEDC là hình vuông) $\Rightarrow \widehat{CMF} = 45^0$ hay $\widehat{CMB} = 45^0$

Ta cũng có $\widehat{CEB} = 45^0$ (vì AEDC là hình vuông); $\widehat{BKC} = 45^0$ (vì ABHK là hình vuông). Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45^0 nên cùng nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên BC $\Rightarrow$ 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.

4. ΔCBM có $\widehat{B} = 45^0; \widehat{M} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BCM} = 90^0$ hay MC $\perp$ BC tại C $\Rightarrow$ MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ví dụ 16: Cho đường tròn (O). BC là dây bất kì (BC < 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân.
2. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp.
3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$.
4. Chứng minh PQ $\perp$ MI.

Giải

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AB = AC $\Rightarrow \Delta$ABC cân tại A.

2. Theo giả thiết MI $\perp$ BC $\Rightarrow \widehat{MIB} = 90^0$; MK $\perp$ AB

$\Rightarrow \widehat{MKB} = 90^0$ $\widehat{MIB} + \widehat{MKB} = 180^0$ mà đây là hai góc đối

$\Rightarrow$ tứ giác BIMK nội tiếp.

* (Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)

3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KMI} + \widehat{KBI} = 180^0$; tứ giác CHMI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HMI} + \widehat{HCI} = 180^0$ mà $\widehat{KBI} = \widehat{HCI}$

(vì tam giác ABC cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{HMI}$ (1).

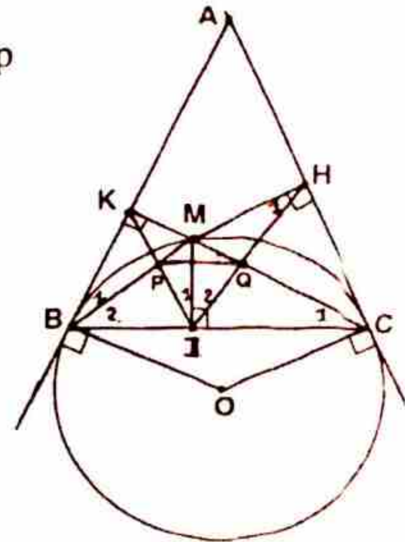
Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{I}_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM)

tứ giác CHMI nội tiếp $\widehat{H}_1 = \widehat{C}_1$

(nội tiếp cùng chắn cung IM).

Mà $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 (= \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{BM}) \Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{H}_1$ (2).



Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKI \sim \Delta MIH \Rightarrow \frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI} \Rightarrow MI^2 = MH.MK$.

4. Theo trên ta có $\hat{I}_1 = \widehat{C}_1$.

Cũng chứng minh tương tự ta có $\hat{I}_2 = \widehat{B}_2$ mà $\widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{BMC} = 180^0$
$\Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \widehat{BMC} = 180^0$ hay $\widehat{PIQ} + \widehat{PMQ} = 180^0$ mà đây là hai góc đối
$\Rightarrow$ tứ giác PMQI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{Q}_1 = \hat{I}_1$ mà $\hat{I}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \widehat{Q}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow PQ // BC$ (vì có hai góc đồng vị bằng nhau).

Theo giả thiết $MI \perp BC$ nên suy ra $IM \perp PQ$.

Bài tập vận dụng

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15cm, AC = 20cm. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Tính khoảng cách từ I đến đương cao AH của tam giác ABC.

2. Tính các cạnh của tam giác vuông ngoại tiếp đường tròn biết :

a. Tiếp điểm trên cạnh huyền chia cạnh đó thành hai đoạn thẳng 5cm và 12cm.

b. Một cạnh góc vuông bằng 20cm, bán kính của đường tròn nội tiếp bằng 6cm.

3. Tính diện tích tam giác vuông biết một cạnh góc vuông bằng 12cm. Tỉ số giữa bán kính của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó bằng 2 : 5.

4. Cho một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10cm, diện tích bằng 24cm. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A. AB = 5. Tính các độ dài AC, BC biết rằng số đo chu vi tam giác ABC bằng số đo diện tích tam giác đó.

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi $(O; r)$, $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$ theo thứ tự là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABH, AHC

a. Chứng minh rằng $r + r_1 + r_2 = AH$.

b. Chứng minh rằng $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

c. Tính độ dài O_1O_2 biết AB = 3cm, AC = 4cm.

7. Đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) song song với các cạnh của tam giác ABC cắt từ tam giác ABC thành ba tam giác nhỏ. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp các tam giác nhỏ đó. Chứng minh rằng $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

8. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AB, AC theo thứ tự ở D, E, F. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AD và DF theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng M là trung điểm của EN.

9. Tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Tính các cạnh của tam giác ABC theo r biết rằng IG song song với AC.

10. Tam giác ABC vuông tại A có AB = 9cm, AC = 12cm. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp. G là trọng tâm của tam giác. Tính độ dài IG.

11. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm trên các cạnh BC, AB, AC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.

12. Cho tam giác ABC có AB = AC = 40cm, BC = 48cm. Gọi O và I theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Tính :

a. Bán kính của đường tròn nội tiếp;

b. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp;

c. Khoảng cách OI.

13. Tính các cạnh của một tam giác cân biết bán kính của đường tròn nội tiếp bằng 6cm, bán kính của đường tròn ngoại tiếp bằng 12,5cm.

14. Bán kính của đường tròn nội tiếp một tam giác bằng 2cm, tiếp điểm trên một cạnh chia cạnh đó thành hai đoạn thẳng 4cm và 6cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác.

15. Tính các góc của một tam giác vuông biết tỉ số giữa các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp bằng $\sqrt{3} + 1$.

16. Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại D. Vẽ đường kính DN của đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt AB, AC theo thứ tự tại I, K.

a. Chứng minh rằng $\dfrac{NI}{NK} = \dfrac{DC}{DB}$.

b. Gọi F là giao điểm của AN và BC. Chứng minh rằng BD = CF.

17. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác đều ABC. Một tiếp tuyến của đường tròn cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự ở M và N.

a. Tính diện tích tam giác AMN biết BC = 8cm và MN = 3cm.

b. Chứng minh rằng $MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM.AN$.

c. Chứng minh rằng $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$.

18. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b. AB = c. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Đường vuông góc với CI tại I cắt AC, AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng:

a. $AM.BN = IM^2 = IN^2$; b. $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

19. Cho tam giác ABC có BC < AC < AB. Trên các cạnh AB, AC lấy các điểm D, E sao cho BD = CE = BC. Gọi O, I theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE bằng OI.

20. Gọi R và r theo thứ tự là các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp một tam giác vuông có diện tích S.

Chứng minh rằng $R + r > \sqrt{2S}$.

21. Trong các tam giác ABC có BC = a, chiều cao tương ứng bằng h. Tam giác nào có bán kính của đường tròn nội tiếp lớn nhất?

22. Trong các tam giác vuông ngoại tiếp cùng một đường tròn, tam giác nào có đường cao ứng với cạnh huyền lớn nhất?

23. a. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $IA + IB + IC \geq 6r$.

b. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi P, Q, N theo thứ tự là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Chứng minh rằng $OP + OQ + ON \geq 3R$.

24. Độ dài các đường cao của tam giác ABC là các số tự nhiên, bán kính của đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều và tính độ dài các đường cao của tam giác đó.

25. Gọi h_a, h_b, h_c là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của một tam giác, r là bán kính của đường tròn nội tiếp. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a. $h_a + h_b + h_c \geq 9r$;

b. $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 27r^2$. Khi nào thì xảy ra đẳng thức?

26. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp một tam giác vuông và h là đường cao ứng với cạnh huyền. Chứng minh rằng $2 < \frac{h}{r} < 2,5$.

27. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^0$.

a. Chứng minh rằng $AC \leq BD$.

b. Trong trường hợp nào thì AC = BD ?

28. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, các dây AC, AD. Gọi E là điểm bất kì trên đường tròn. H và K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AC, AD. Chứng minh rằng $HK \le AB$.

29. Cho đường tròn tâm O, dây AB = 24cm, dây AC = 20cm ($\widehat{BAC} < 90^0$ và điểm O nằm trong góc BAC). Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến AB bằng 8cm.

a. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.

b. Tính bán kính của đường tròn.

30. Cho đường tròn tâm O bán kính 5cm, hai dây AB và CD song song với nhau có độ dài theo thứ tự :8cm và 6cm. Tính khoảng cách giữa hai dây.

31. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 13cm. Dây CD có độ dài 12cm vuông góc với AB tại H.

a. Tính các độ dài HA, HB.

b. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác CMHN.

32. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD.

a. Chứng minh rằng CH = DK.

b. Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.

c. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác AHKB, biết AB = 30cm. CD = 18cm.

33. Cho tam giác ABC. các đường cao AD, BE, CF. Đường tròn đi qua D, E, F cắt BC, CA, AB theo thứ tự Ở M, N, P. Chứng minh rằng các đường thẳng kẻ từ M vuông góc với BC, kẻ từ N vuông góc với AC, kẻ từ P vuông góc với AB đồng quy.

34. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc với CD.

35. Cho nửa đường đường tròn tâm O có đường kính AB = 2R. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn và tia Oz vuông góc với AB (các tia Ax, By, Oz cùng phía với nửa đường tròn đối với AB). Gọi E là điểm bất kì của nửa đường tròn, qua E vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By, Oz theo thứ tự Ở C, D, M. Chứng minh rằng khi điểm E thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì :

a. Tích AC. BD không đổi.

b. Điểm M chạy trên một tia.

c. Tứ giác ACDB có diện tích nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

36. Cho đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By song song với nhau.

a. Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với đoạn thẳng AB và tiếp xúc với các tia Ax, By.

b. Tính $\widehat{AOB}$.

c. Gọi các tiếp điểm của đường tròn (O) với Ax, By, AB theo thứ tự là M, N, H. Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AB.

d. Các tia Ax, By có vị trí như thế nào thì HM = HN ?

37. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm I của AD.

a. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn (I; IA).

b. Cho AD = *2a*. Tính tích của AB và CD theo a.

c. Gọi H là tiếp điểm của BC với đường tròn (I) nói trên, K là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng KH song song với DC.

38. Cho đường tròn tâm O có đường kính AB, D là một điểm nằm trên đường tròn. Các tiếp tuyến của đường tròn tại A và tại D cắt nhau ở C. Gọi E là hình chiếu của D trên AB, gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh rằng DI = IE.

39. Cho tam giác ABC cân tại A, O là trung điểm của BC. Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB, AC tại H, K. Một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AC ở M, N.

a. Cho $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$. Tính $\widehat{MON}$.

b. Chứng minh rằng OM, ON chia tứ giác BMNC thành ba tam giác đồng dạng.

c. Cho BC = 2a. Tính tích BM.CN.

d. Tiếp tuyến MN ở vị trí nào thì tổng BM + CN nhỏ nhất ?

40. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, HB = 20cm, HC = 45cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ các tiếp tuyến BM, CN với đường tròn (M và N là các tiếp điểm, khác điểm H).

a. Tính diện tích tứ giác BMNC.

b. Gọi K là giao điểm của CN và HA. Tính các độ dài AK. KN.

c. Gọi I là giao điểm của AM và CB. Tính các độ dài IM, IB.

41. Cho đường tròn tâm O bán kính 6cm. Một điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn vuông góc với nhau (B, C là các tiếp điểm). Trên hai cạnh AB, AC của góc A. Lấy các điểm D, E sao cho AD = 4cm. AE = 3cm. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

42. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Với tâm B và bán kính a, vẽ cung AC nằm trong hình vuông. Qua điểm E thuộc cung đó, vẽ tiếp tuyến với cung AC, cắt DA và DC theo thứ tự tại M và N.

a. Tính chu vi tam giác DMN.

b. Tính số đo góc MBN.

c. Chứng minh rằng $\frac{2a}{3} < MN < a$.

43. Cho hình vuông ABCD. Một đường tròn tâm O tiếp xúc với các đường thẳng AB, AD và cắt mỗi cạnh BC, CD thành hai đoạn thẳng có độ dài 2cm và 23cm. Tính bán kính của đường tròn.

44. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc nhau ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$.

a. Tính $\widehat{BAC}$.

b. Tính BC.

c. Gọi D là giao điểm của CA với đường tròn O, $(D \neq A)$. Chứng minh rằng ba điểm B, O, D thẳng hàng.

45. Cho điểm B nằm giữa A và C sao cho AB = 14cm, BC = 28cm. Vẽ về một phía của AC các đường tròn tam, K, O có đường kính theo thứ tự AB, BC, AC. Tính bán kính của đường tròn tâm M tiếp xúc ngoài với các nửa đường tròn (I), (K) và tiếp xúc với nửa đường tròn (O).

46. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và CD theo thứ tự tại E và G thuộc (O), F, H thuộc (O'). Chứng minh rằng: a. AB = EF; b. EG = FH.

47. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O), ở đây A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D.

a. Chứng minh $MA^2 = MC.MD$.

b. Gọi I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng 5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên một đường tròn.

c. Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của góc CHD.

d. Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). Chứng minh A, B, K thẳng hàng.

48. Cho hình vuông ABCD. Trong hình vuông vẽ nửa đường tròn đường kính AD và vẽ cung AC có tâm là D. Lấy một điểm P trên cung AC, nối PD cắt nửa đường tròn tại K. Vẽ PI vuông góc với AB và PE vuông góc với AD. Chứng minh:

a. $\Delta APE = \Delta APK$.

b. 5 điểm A, I, P, K, E thuộc cùng một đường tròn.

c. PI = PK.

49. Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a và O là trung điểm của AB. Từ O kẻ đường vuông góc với AB, trên đó lấy OD = 2a. Nối A với D, rồi từ B hạ đường vuông góc BC xuống AD.

a. Tính AD, AC, BC.

b. Trên tia đối của tia OD lấy điểm E sao cho OE = a. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, B, E cùng nằm trên một đường tròn.

c. Nối E với C. Chứng minh rằng CE là phân giác của góc ACB.

50. Cho hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC.

a. Tính BC.

b. Tính diện tích tứ giác OBCO'.

c. Khi $R' = \frac{R}{3}$, tính diện tích giới hạn bởi BC và hai cung AB và AC.

51. Cho tam giác ABC có góc A lớn hơn góc C là 90^0.

a. Chứng minh rằng góc C nhỏ hơn 45^0.

b. Chứng minh rằng tiếp tuyến BH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đồng thời cũng là đường cao của tam giác đó.

c. Chứng minh rằng $BH^2 = HA.HC$.

d. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

52. Cho đường tròn đường kính AB và đường tròn tâm A bán kính AB, vẽ dây BF của đường tròn lớn, cắt đường tròn nhỏ tại C, vẽ dây CD của đường tròn nhỏ vuông góc với AB.

a. Chứng minh rằng CB = CF.

b. So sánh $\widehat{CBA}$ với $\widehat{ACD}$.

c. Gọi M là trung điểm của AC. Khi C chuyển động trên ửa đường tròn đường kính AB thì M chuyển động trên đường nào?

53. Nửa đường tròn đường kính AB. C là một điểm thuộc nửa đường tròn. Trên AC kéo dài lấy AD = AB. Trên AB lấy AE = AC; DE cắt BC tại H; AH cắt nửa đường tròn tại K.

a. Chứng minh $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$

b. Chứng minh OK vuông góc với BC.

c. Chứng minh tứ giác ACHE là tứ giác nội tiếp.

d. Chứng minh B, K, D thẳng hàng.

54. Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự trên mặt đường thẳng sao cho: $\frac{AC}{CB} = \frac{DA}{DB}$. Nối 4 điểm trên với một điểm O ngoài đường thẳng được một chùm các đường thẳng đồng quy, OA, OC, OB, OD.

a. Từ điểm B kẻ đường thẳng song song với OA cắt OC và OD tại E và F. Chứng minh rằng B là trung điểm của EF.

b. Kẻ một cát tuyến thứ hai cắt 4 đường thẳng đồng quy tại A', C', B', D'. Chứng minh rằng $\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{D'A'}{D'B'}$.

55. Cho tam giác ABC, các đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt BC ở D và phần kéo dài của BC ở E. Tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC kéo dài tại F.

a. Chứng minh rằng tam giác AFD cân, suy ra giá trị của tỉ số $\frac{FD}{EF}$.

b. Chứng minh rằng tam giác AFB và AFC đồng dạng, suy ra giá trị tỉ số diện tích của chúng theo AB và AC.

Xác định tỉ số $\frac{FB}{FC}$ theo AB và AC.

56. Cho tam giác ABC vuông góc tại A có AB = c, AC = b. Kẻ đường phân giác trong AD của góc vuông cắt cạnh huyền tại D, rồi kẻ đường song song BE với AD (E thuộc đường thẳng AC).

a. Chứng minh rằng AE = AB, và tính BE.

b. Tính độ dài đường phân giác AD.

c. Tính diện tích hình thang ADBE và diện tích tam giác ADC.

57. Cho tam giác đều ABC. Từ B và C lần lượt kẻ đường thẳng vuông góc với AB và AC chúng cắt nhau ở D.

a. Chứng minh DC = DB, và góc $BDC = 120^0$.

b. Vẽ đường tròn tâm D bán kính DC. Gọi M là một điểm bất kì trên cung nhỏ BC; BM cắt AC ở E; MC cắt AB ở F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác EMF đi qua một điểm cố định.

c. Chứng minh rằng AE = BF.

58. Hai đường tròn O và O' có bán kính R và R' (R > R') tiếp xúc ngoài tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua C của đường tròn (O) và (O'). DE là dây cung của đường tròn O vuông góc với AB tại trung điểm M của AB; CD cắt đường tròn O' tại F.

a. Tứ giác AEBD là hình gì?

b. Chứng minh 3 điểm B, E, F thẳng hàng.

c. Chứng minh MDBF nội tiếp được đường tròn.

d. DB cắt đường tròn O' tại G. Chứng minh DF, EG và AB đồng quy.

e. Chứng minh $MF = \frac{1}{2}DE$ và MF là tiếp tuyến của đường tròn O'.

59. Cho tam giác ABC, lấy một điểm D bất kì trên cạnh BC. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB và ADC. Gọi O và O', R và R' là tâm và bán kính của hai đường tròn đó.

a. Chứng minh rằng tam giác AOO' và ABC đồng dạng.

b. Suy ra tỉ số $\frac{R}{R'}$ không phụ thuộc vào vị trí của D trên BC.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của bán kính R và R'. Khi đó hãy xét vị trí của D trên BC.

60. Cho đường tròn O có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau.

a. Chứng minh rằng tứ giác ACBD là hình vuông.

b. Tính cạnh hình vuông và khoảng cách từ tâm tới cạnh theo bán kính R = 1,60 (m).

c. Từ A kẻ tiếp tuyến với đường tròn O cắt BC kéo dài tại E. Tính diện tích giới hạn bởi các đoạn CE và cung AC.

61. Cho tam giác ABC vuông góc tại A, các cạnh góc vuông AB = c, AC = b, (c < b). Kẻ đường phân giác trong AD của góc A và đường song song với phân giác đó đi qua B. Đường thẳng này cắt CA kéo dài tại E.

a. Chứng minh rằng AE = AB và tính EB; AD.

b. Trên AC, từ A về phái C, lấy AK = AB. Từ A kẻ một đường song song với BK cắt BC tại D'. Chứng minh rằng AD' là phân giác ngoài của góc A của ΔABC. Tính BK, AD'.

62. Cho tam giác ABC vuông tại A, và có độ dài hai cạnh góc vuông AB = 24mm, AC = 18mm. Từ trung điểm M trên cạnh huyền BC kẻ đường vuông góc với cạnh huyền cắt AC tại D và AB tại E.

a. Tính độ dài MC.

b. Chứng minh rằng ΔDMC đồng dạng với ΔABC và tính độ dài các cạnh của ΔDMC.

c. Tính độ dài BE.

d. Chứng minh rằng 4 điểm E, A, M, C cùng thuộc một đường tròn và tính bán kính đường tròn đó.

63. Cho hình vuông OCID có cạnh là a, kéo dài các cạnh OC và OD để được 2 tia Ox và Oy. Gọi AB là một đường thẳng bất kì đi qua I và cắt Ox tại A, cắt Oy tại B.

a. Chứng minh rằng tích CA.DB có giá trị không đổi.

b. Chứng minh rằng $\dfrac{AC}{DB} = \dfrac{OA^2}{OB^2}$

c. Biết diện tích tam giác AOB là $\dfrac{8a^2}{3}$. Tính CA và BD theo a.

64. Cho tam giác ABC vuông góc tại A và có AB = 28mm,. AC = 21mm.

a. Tính đường cao AH

b. Đường tròn đường kính AH cắt cạnh B tại D và AC tại E. Chứng minh rằng tứ giác ADHE là hình chữ nhật và tính diện tích của hình chữ nhật đó.

c. Từ D và E kẻ các tiếp tuyến với đường tròn trên cắt cạnh huyền tại M và N. Chứng minh rằng $MN = \dfrac{BC}{2}$.

65. Cho đường tròn (A; 5,0cm) và một điểm B cách A một khoảng AB = 8cm. Từ B kẻ tiếp tuyến BT và cát tuyến BNM (N nằm giữa B và M). Gọi H là hình chiếu của T trên AB.

a. Chứng minh rằng hai tam giác MBT và TBN đồng dạng.

b. Tam giác ABT là tam giác gì? Suy ra hệ thức $BT^2 = BH.BA$.

c. Chứng minh rằng hai tam giác ABM và NHB đồng dạng, từ đó suy ra tứ giác AHMN nội tiếp được.

66. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Các cát tuyến tại A của các đường tròn (O) và (O') cắt đường tròn (O') và (O) theo thứ tự tại C và D. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các dây cung AD và AC. Chứng minh:

a. Hai tam giác ABD và ABC đồng dạng.

b. $\widehat{BPD} = \widehat{AQB}$.

c. Tứ giác APBQ nội tiếp.

67. Cho đường tròn (O; R), đường kính AB và một điểm M nằm trên đường tròn sao cho MA > MB. Các tiếp tuyến của đường tròn tại M à B cắt nhau tại điểm P. Các đường thẳng AB, MP cắt nhau tại điểm Q; các đường thẳng AM, OM cắt đường thẳng BP lần lượt tại các điểm R, S.

a. Chứng minh rằng tứ giác MAPO là hình thang.

b. Chứng minh rằng BM // SQ.

c. Gọi R_1 là điểm đối xứng với R qua đường thẳng AB. Chứng minh rằng tứ giác $ASQR_1$ nội tiếp được.

68. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} < 90^0$) nội tiếp đường tròn (O; R). Vẽ các đường cao BD, CE. Các tia BD, CE lần lượt cắt đường tròn (O; R) tại các điểm thứ hai D', E'.

a. Chứng minh rằng bốn điểm B, E, D, C nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh rằng E'D' // ED.

c. Chứng minh rằng $OA \perp ED$.

d. Cho điểm A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O; R). Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AED không đổi.

69. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Các đường thẳng AO, AO' cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai C, D và cắt đường tròn (O') lần lượt tại các điểm thứ hai E, F.

a. Chứng minh rằng B, F, C thẳng hàng.

b. Chứng minh: tứ giác CDEF nội tiếp được.

c. Chứng minh rằng A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE.

d. Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của đường tròn (O), (O').

70. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các tiếp điểm bên cạnh BC của đường tròn bàng tiếp trong góc A và của đường tròn nội tiếp đối xứng với nhau qua trung điểm của BC.

71. Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh của tam giác ABC; h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng; R_a, R_b, R_c là bán kính của các đường tròn bàng tiếp tương ứng, r là bán kính của đường tròn nội tiếp; p là nửa chu vi tam giác; S là diện tích tam giác. Chứng minh rằng :

a. $S = R_a(p - a) = R_b(p - b) = R_c(p - c)$;

b. $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$.   c. $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}$.

72. Tính cạnh huyền của một tam giác vuông, biết r là bán kính của đường tròn nội tiếp và R là bán kính của đường tròn bàng tiếp trong góc vuông.

73. Cho tam giác ABC. Gọi (P), (Q), (R) theo thứ tự là các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C.

a. Gọi tiếp điểm của (Q), (R) trên đường thẳng BC theo thứ tự là E, F. Chứng minh rằng CE = BF.

b. Gọi H, I, K theo thứ tự là tiếp điểm của các đường tròn (P), (Q), (R) với các cạnh BC, AC, AB. Nếu AH = BI = CK thì ABC là tam giác gì?

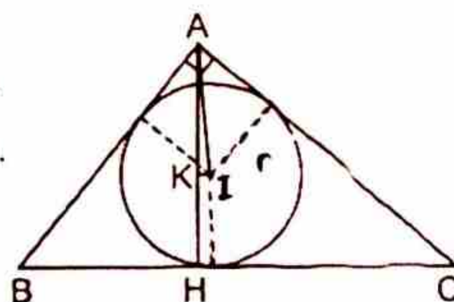
Hướng dẫn và đáp số

1. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔABC.

Dễ dàng tính được BC = 25cm, $r = \dfrac{15 + 20 - 25}{2} = 5(\text{cm})$..

$AI = 5\sqrt{2}\text{cm}, AH = 12\text{cm}$ .Kẻ $IK \perp AH$.

Ta tính được AK = 7cm, IK = 1cm.



2.a. Gọi x là bán kính của đường tròn nội tiếp.

Phương trình $(x+5)^2 + (x+12)^2 = 17^2; x = 3$.

Đáp số: AB = 8cm, AC = 15cm, BC = 17cm.

b. Giả sử AB =20cm.

Thế thì BD = BF = 20 – 6 = 14 (cm).

Đặt CD = CE = x.

Phương trình $20^2 + (x+6)^2; x = 15$.

3. Xét ΔABC vuông tại A. Giả sử AB = 12cm. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp thì $BC = 5r$. Do đó $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25r^2 - 144$. (1)

Ta có $AB + AC - BC = 2r$, nên $AC = BC + 2r - AB = 7r - 12$. (2)

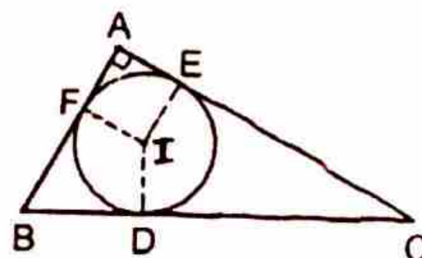
Từ (1) và (2) suy ra $(7r - 12)^2 = 25r^2 - 144$.

Thu gọn phương trình được:

$r^2 - 7r + 12 = 0 \Leftrightarrow (r-3)(r-4) = 0$.

Vậy r = 3 hoặc r = 4.

Đáp số $S = 54\text{cm}^2$ hoặc $S = 96\text{cm}^2$



4. Gọi b, c là các cạnh góc vuông và giả sử $b \geq c$. Từ bc = 48 và $b^2 + c^2 = 100$, ta có hệ $\begin{cases} bc = 48 \\ b^2 + c^2 = 100 \end{cases}$. Từ đó tính được $b = 8, c = 6$.

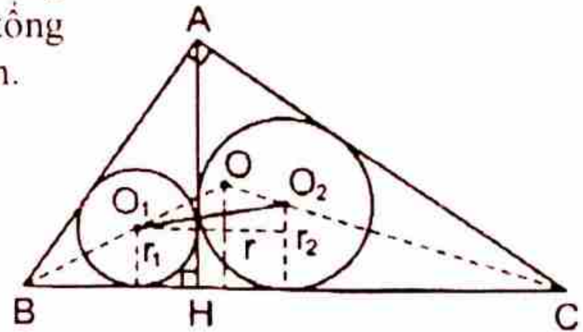
Bán kính của đường tròn nội tiếp bằng $\dfrac{8 + 6 - 10}{2} = 2(\text{cm})$.

5. Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Số đo diện tích tam giác bằng số đo chu vi nên $(a+b+c).\frac{r}{2}=a+b+c$. Từ đó r = 2. Ta có $b+c-a=2r$.

Do r = 2 và c = 5 nên $a-b=1$. Từ $a^2-b^2=25$ và $a-b=1$, ta tính được $a=13$, $b=12$.

6. a. Dễ chứng minh: đường kính của đường tròn nội tiếp tam giác vuông bằng tổng các cạnh góc vuông trừ đi cạnh huyền.



Do đó

$2r_1 = AH + BH - AB$

$2r_2 = AH + CH - AC$

$2r = AB + AC - BC$.

Suy ra $r + r_1 + r_2 = AH$.

b. Các tam giác vuông ABC, HBA, HAC đồng dạng nên: $\frac{r}{BC}=\frac{r_1}{AB}=\frac{r_2}{AC}$.

Do đó $\frac{r^2}{BC^2}=\frac{r_1^2}{AB^2}=\frac{r_2^2}{AC^2}=\frac{r_1^2+r_2^2}{AB^2+AC^2}=\frac{r_1^2+r_2^2}{BC^2}$

Suy ra $r^2=r_1^2+r_2^2$.

c. $O_1O_2^2=(r_2-r_1)^2+(r_2+r_1)^2=2(r_1^2+r_2^2)=2r^2$.

Ta lại có $r=\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{3+4-5}{2}=1(cm)$.

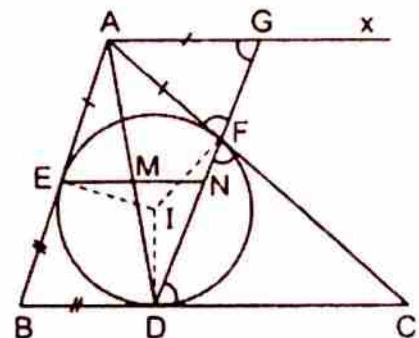
Do đó $O_1O_2^2=2$, suy ra $O_1O_2=\sqrt{2}$ (cm).

7. Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là chu vi của tam giác nhỏ, P là chu vi của ΔABC.

Các tam giác nhỏ đồng dạng với ΔABC nên $\frac{r_1}{r}=\frac{P_1}{P}, \frac{r_2}{r}=\frac{P_2}{P}, \frac{r_3}{r}=\frac{P_3}{P}$.

Do đó $\frac{r_1+r_2+r_3}{r}=\frac{P_1+P_2+P_3}{P}$. Nhưng $P_1+P_2+P_3=P$ (dễ dàng chứng minh) nên $r_1+r_2+r_3=r$.

8. Kẻ Ax // BC, cắt DF ở G.



Dễ dàng chứng minh được AE = AF = AG.

Lần lượt chứng minh:

$\frac{MN}{AG}=\frac{DM}{DA}=\frac{BE}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{EM}{EA}=\frac{EM}{AG}$.

Suy ra MN = EM. Vậy M là trung điểm của EN.

9. Kẻ GG', II' vuông góc với AC. Ta có GG' = II' = r.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

Ta có $2r = b + c - a$, mà c = 3GG' = 3r

nên $a - b = r$ (1).

Ta lại có $a^2 - b^2 = c^2 = 9r^2$ nên kết hợp

với (1) suy ra $a + b = 9r$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra a = 5r, b = 4r, do đó c = 3r.

10. Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB.

Ta tính được BC =15cm,

$$AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3(cm).$$

Gọi N là giao điểm của BI và AC. Ta có:

$$\frac{BI}{BN} = \frac{BD}{BA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{BG}{BM} \Rightarrow IG \,//\, NM,\ IG = \frac{2}{3}NM.$$

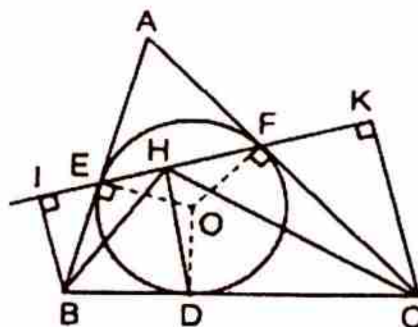
Lần lượt tính AN = 4,5cm; AM = 6cm.

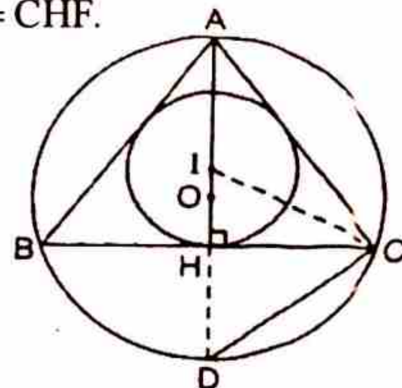
Suy ra NM = 1,5cm; do đó IG = 1cm.

11. Kẻ BI, CK vuông góc EF. Tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{BEI} = \widehat{CFK}$.

$\Delta BEI \sim \Delta CFK$ (g.g). Lần lượt chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} = \frac{HI}{HK}$ để

suy ra $\Delta BHI \sim \Delta CHK$ (c.g.c). Do đó $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.





12. a. Kẻ đường cao AH. Ta tính được AH = 32cm.

Áp dụng tính chất đường phân giác của ΔAHC, tính được IH = 12cm.

b. Kẻ đường kính AD của đường tròn (O).

Từ $AC^2 = AH.AD$, tính được AD = 50cm. Do đó OA = 25cm.

c. Đáp số: OI = 5cm.

13. Gọi (I) và (L) là các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp ΔABC cân tại a.

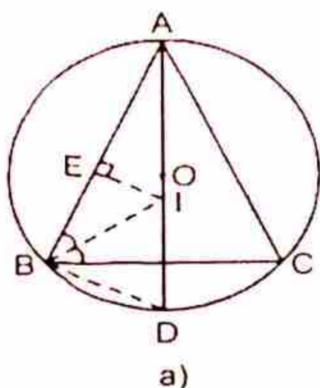
Kẻ đường kính AD. Dễ chứng minh DI = DB. Đặt AI = x, ID = y.

Kẻ $IE \perp AB$. Ta có: x + y = AD = 25 (1); $\frac{AI}{AD} = \frac{IE}{BD} = \frac{IE}{ID} \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{6}{y}$ (2)

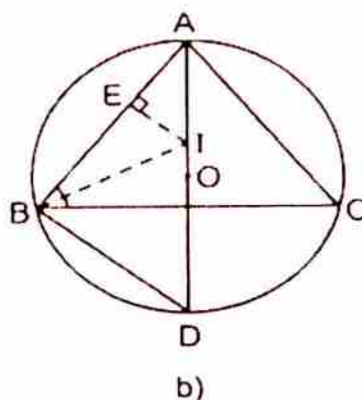
Từ (1) và (2) suy ra x = 15, y =10 hoặc x = 10, y = 15.

Trường hợp thứ nhất cho $AB = 5\sqrt{2}cm, BC = 4\sqrt{21}cm$ (h.a).

Trường hợp thứ hai cho AB = 20cm, BC = 24cm (h.b).

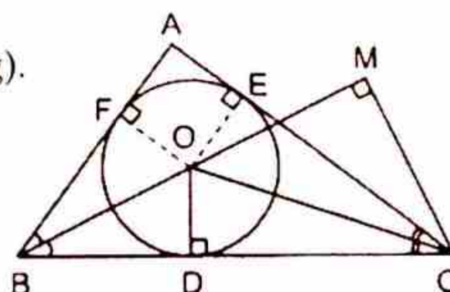


a)



b)

14. Tính OB trong ΔODB được $OB = 2\sqrt{5}$.



Kẻ $CM \perp BO$. Ta có $\Delta BOD \sim \Delta BCM$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{BO}{BC} = \dfrac{OD}{CM}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{BM} = \dfrac{2\sqrt{5}}{10} = \dfrac{2}{CM}$.

Suy ra $CM = 2\sqrt{5}, BM = 4\sqrt{5}$. Do đó $OM = 2\sqrt{5}$.

Vậy ΔCOM vuông cân, $\widehat{COM} = 45^0$. Do đó $\widehat{A} = 90^0$. Dễ dàng tính được AE = AF = OE = 2cm, AB = 6cm, AC = 8cm.

15. Gọi a là cạnh huyền, b và c là các cạnh góc vuông (giả sử $b \geq c$), R và r là các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

Ta có: $a = 2R$ (1); $\dfrac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$ (2); $b^2 + c^2 = a^2$ (3); $b + c - a = 2r$. (4)

Cần tính $\sin B = \dfrac{b}{a}, \sin C = \dfrac{c}{a}$, do đó đặt $\dfrac{b}{a} = m, \dfrac{c}{a} = n$.

Từ (3) suy ra $\dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = 1$.

Từ (4), (1), (2) có $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} - 1 = \dfrac{2r}{a} = \dfrac{2r}{2R} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Suy ra $m + n = 1 + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Từ $m^2 + n^2 = 1$, $m + n = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ với $m \geq n$, ta tính được $(m+n)^2$, $2mn$, $(m-n)^2, m - n$.

Từ đó $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, n = \dfrac{1}{2}$.

Đáp số: $\widehat{B} = 60^0, \widehat{C} = 30^0, \widehat{A} = 90^0$.



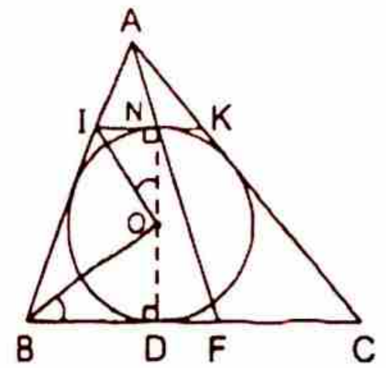
16. a. Đặt OD = ON = r.

Ta có $\Delta NOI \sim \Delta DBO$

$\Rightarrow \frac{NI}{DO} = \frac{NO}{DB} \Rightarrow NI.DB = NO.DO = r^2.$

Tương tự $NK.DC = r^2$.

Suy ra NI.DB = NK.DC, do đó $\frac{NI}{NK} = \frac{DC}{DB}$.



b. Do IK // BC nên theo định lý Ta-lét

$\frac{NK}{FC} = \frac{AK}{AC} = \frac{IK}{BC}$. (1)

Từ câu a. suy ra: $\frac{NK}{DB} = \frac{NI}{DC} = \frac{NK+NI}{DB+DC} = \frac{IK}{BC}$. (2)

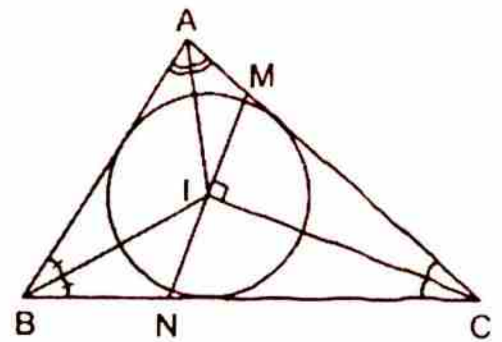
Từ (1) và (2) ta có $\frac{NK}{FC} = \frac{NK}{DB}$, do đó FC = DB.

17. Gọi r là bán kính của đường tròn (O), D và E là tiếp điểm trên cạnh AB và AC. Đặt AB = AC = BC = a, AM = x, AN = y, MN = z.

a. Trước hết tính r, được $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lần lượt tính S_{ADOE}, S_{MON} và chú ý rằng:

$S_{AMN} = S_{ADOE} - 2S_{MON}$



b. Kẻ $NH \perp AB$.

Ta có $AH = \frac{y}{2}, NH = \frac{y\sqrt{3}}{2}, HM' = x - \frac{y}{2}$.

Theo định lý Pitago: $MN^2 = NH^2 + HM^2 = \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - xy.$

c. Dễ thấy x + y + z = 2AD = a. Hệ thức phải chứng minh $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$

tương đương với $\frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+z} + \frac{y}{x+z} = 1$

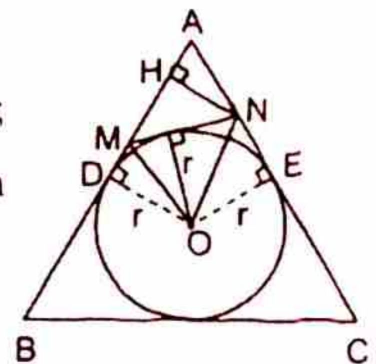
Đẳng thức cuối đã được chứng minh ở câu b.

18. Ta có $\widehat{AMI} = \widehat{INB} = \widehat{AIB}$ (cùng bằng $90^0 + \frac{\widehat{C}}{2}$);

$\Delta AMI \sim \Delta AIB$ (g.g), $\Delta AIB \sim \Delta INB$ (g.g) nên các tam giác AMI và INB đồng dạng.

Suy ra $\frac{IM}{BN} = \frac{AM}{IN}$.

Do đó $AM.BN = IM.IN = IM^2 = IN^2$.



b. Đặt AM = m, BN = n, IM = IN = x. Do ΔAMI và ΔAIB đồng dạng nên

$$\frac{AM}{AI} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow IA^2 = AM.AB = m.c \Rightarrow \frac{IA^2}{bc} = \frac{m}{b}. \quad (1)$$

Tương tự $\frac{IB^2}{ca} = \frac{n}{a}$. (2).

Xét ΔMIC vuông tại I, ta có $IC^2 = CM^2 - IM^2$.

Do $IM^2 = mn$ (câu a) và CM = CN nên

$IC^2 = (b-m)(a-n) - mn = ab - bn - am + mn - mn = ab - bn - am.$

Do đó $\frac{IC^2}{ab} = 1 - \frac{n}{a} - \frac{m}{b}$. (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

19. Vẽ đường tròn (I; IO), ta sẽ chứng minh rằng đường tròn (I) ngoại tiếp một tam giác bằng tam giác ADE. Vẽ các dây OM, ON của đường tròn (I) theo thứ tự song song với AC, AB. Ta sẽ chứng minh $\Delta ADE = \Delta OMN$.

Kẻ OO', II' vuông góc với AB.

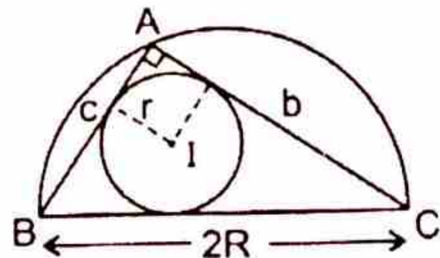
Ta có: $ON = 2O'I' = 2(AI' - AO')$

$= (AB + AC - BC) - AB = AC - BC = AE.$

Tương tự OM = AD.

$\Delta OMN = \Delta ADE$ (c.g.c). Do đó các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác đó bằng nhau, tức là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE bằng OI.

20. Gọi b và c là các cạnh góc vuông.



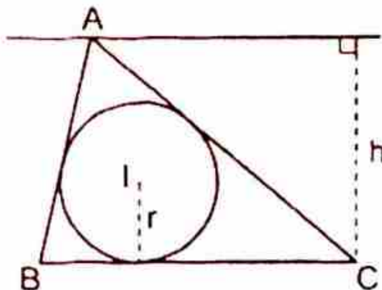
Ta có

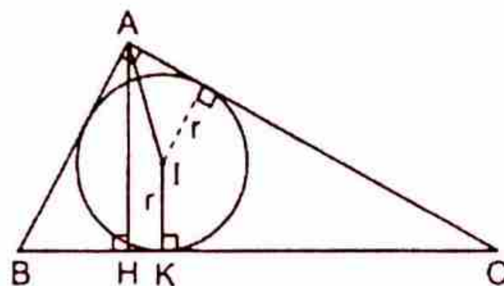
$2r = b + c - 2R$

$\Rightarrow R + r = \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} = \sqrt{2S}.$

21. Gọi S là diện tích ΔABC thì S không đổi, gọi p là nửa chu vi, r là bán kính của đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có S = pr. Do đó r lớn nhất $\Leftrightarrow$ p nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AB + AC nhỏ nhất.

Dễ dàng chứng minh được tam giác phải tìm là tam giác cân tại A.





22. Xét ΔABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (I; r). Kẻ AH, IK vuông góc với BC.

Ta có $AH \le AI + IK = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2}+1)$. $\max AH = r(\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow$ các đường thẳng AI, AH trùng nhau $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

23. a. Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Kẻ BB', CC' vuông góc với AI.

Ta có cr = IA.BB', br = IA.CC' nên

$$(b+c)r = IA.(BB'+CC') \le IA.a \Rightarrow \frac{IA}{r} \ge \frac{b+c}{a}.$$

Tương tự $\frac{IB}{r} \ge \frac{a+c}{b}, \frac{IC}{r} \ge \frac{a+b}{c}$.

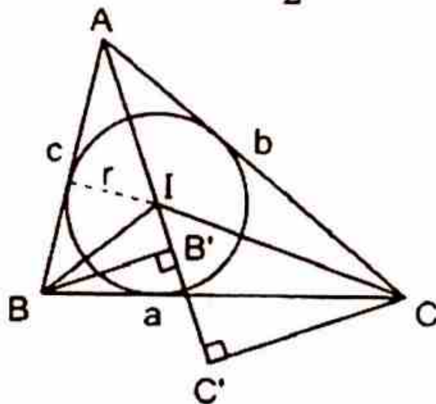
Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được

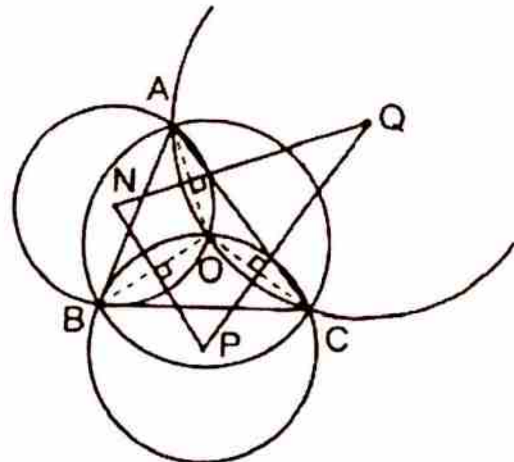
$$\frac{IA+IB+IC}{r} \ge \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 6 \Rightarrow IA+IB+IC \ge 6r.$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b. Dễ thấy khoảng cách từ O đến các cạnh của ΔPQN bằng $\frac{R}{2}$ nên O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó. Theo câu a

$$OP + OQ + ON \ge 6.\frac{R}{2} = 3R.$$





24. Ta có $h_a > 2r = 2 \Rightarrow h_a \ge 3$ (vì $h_a \in N$). Suy ra $2S = ah_a \ge 3a$. (1)

Giả sử $a \ge b \ge c$, ta có: $2S = (a+b+c)r = a+b+c \le 3a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2S = 3a. Xảy ra dấu bằng ở (2) khi và chỉ khi b = a, c = a, tức là ΔABC đều. Khi đó $h_a = h_b = h_c = 3$.

25. Trước hết bạn đọc tự chứng minh bổ đề sau:

Nếu a, b, c, dương $\ne 0$ thì $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ (1)

a. $h_a + h_b + h_c = \frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c} = 2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = r(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9r.$

Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b. Trước hết chứng minh $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c)^2$, sau đó áp dụng kết quả câu a). Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow h_a = h_b = h_c$ và $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

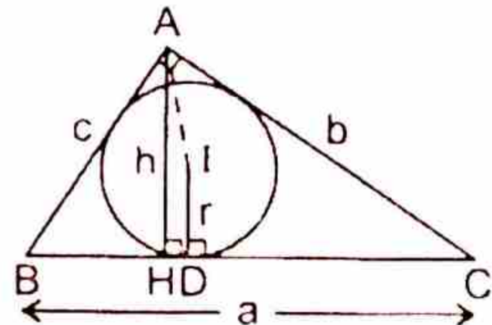
26. Xét tam giác ABC vuông tại A, gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp. Kẻ AH, ID vuông góc với BC. Đặt BC = a. AC = b. AB = c.

Ta có ah = (a + b + c)r (cùng bằng 2S).

Nên $\frac{h}{r} = \frac{a+b+c}{a} > \frac{a+a}{a} = \frac{2a}{a} = 2$

Mà $AH \leq AI + ID$ hay $h \leq r\sqrt{2} + r$ do đó

$\frac{h}{r} \leq \sqrt{2} + 1 < 2,5$.

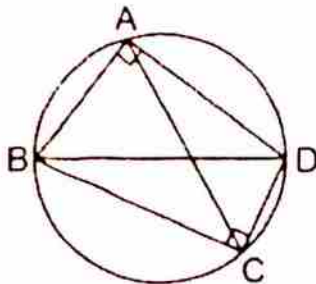


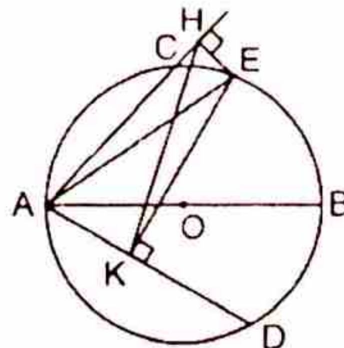
Từ (1) và (2) suy ra $2 < \frac{h}{r} < 2,5$.

27. a. AC là dây của đường tròn có đường kính là BD nên $AC \leq BD$.

b. AC = BD $\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

28. Các điểm A, H, E, K thuộc đường tròn có đường kính AE, mà HK là dây của đường tròn đó nên $HK \leq AE$. Trong đường tròn (O), ta có $AE \leq AB$. Do đó $HK \leq AB$





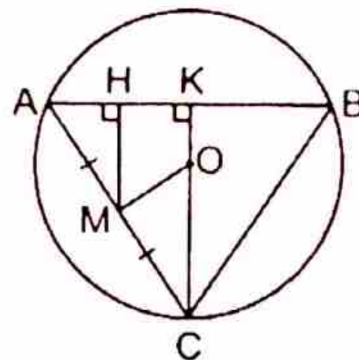
29. a. Kẻ $HM \perp AB$. Tam giác vuông AHM có AM = 10cm, MH = 8cm nên AH = 6cm.

Kẻ $CK \perp AB$.

Ta có: CK = 2MH = 16cm.

AK = 2AH = 12cm.

Do $AK = \frac{1}{2}AB$ nên CK là đường trung trực của AB, do đó CK đi qua O. Vậy ΔABC cân tại C.



b. Để tính OC, ta chú ý đến cặp tam giác đồng dạng OMC và AKC.

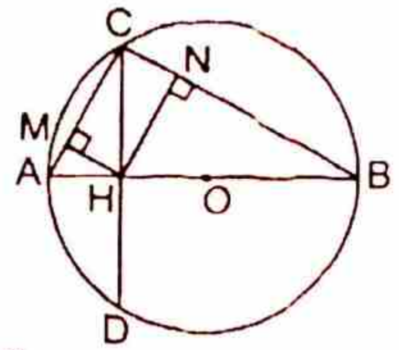
Suy ra: $\frac{MC}{KC} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{10}{16} = \frac{OC}{20}$.

Đáp số: OC = 12,5 cm.

30. Tính khoảng cách từ O đến AB, được 3cm.

Tính khoảng cách từ O đến CD được 4cm.

Đáp số: 7 cm hoặc 1cm.



31. a. đường kính AB vuông góc với dây CD

nên $CH = \frac{CD}{2} = 6cm$ (giả sử HA < HB).

Áp dụng định lý Py-ta-go ta tính được OH = 2,5cm.

Do đó HB = 9cm, HA = 4cm.

b. ***Cách 1:*** Ta có $S_{CMHN} = \frac{CH^3}{AB}$ nên $S_{CMHN} = \frac{6.6.6}{13} = \frac{216}{3} = 16\frac{8}{3}\left(cm^2\right)$.

Cách 2. ΔCHN và ΔABC đồng dạng nên

$S_{CHN} : S_{ABC} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \left(\frac{6}{13}\right)^2 = \frac{36}{169}$. Ta lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}.13.6 = 39\left(cm^2\right)$

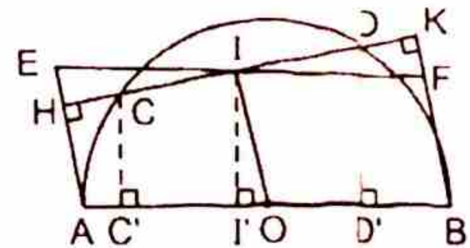
$S_{CHN} = 39.\frac{36}{169} = \frac{108}{13}$. Vậy $S_{CMHN} = \frac{216}{13} = 16\frac{8}{13}\left(cm^2\right)$

32. a. Gọi I là trung điểm của CD. Hãy chứng minh IH = IK và IC = ID.

b. Qua I kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH và BK ở E và F. Lần lượt chứng minh:

$S_{AHKB} = S_{AEFB}; S_{AEFB} = AB.II'$

$S_{ABC} + S_{ADB} = AB.II'$ (kẻ II', CC', DD' vuông góc với AB).

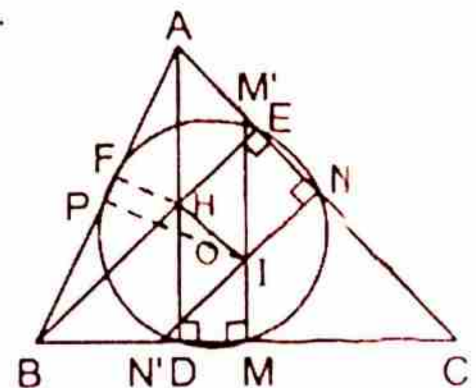


c. Ta tính được $IO = 12cm; S_{AHKB} = AB.II' \le AB.IO = 30.12 = 360$.

$\max S_{AHKB} = 360cm^2 \Leftrightarrow I' \equiv O \Leftrightarrow CD \,//\, AB$.

Khi dó AHKB là hình chữ nhật.

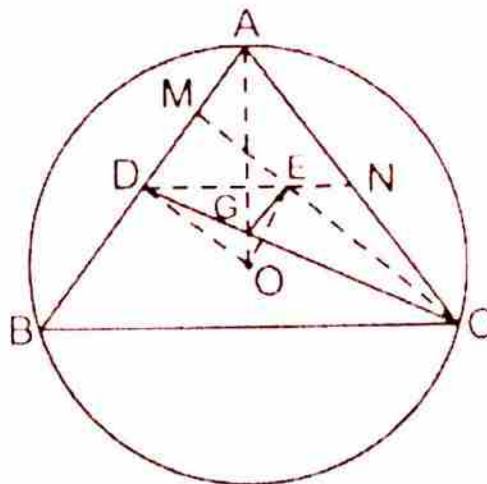
33. Kẻ MM' $\perp$ BC, NN' $\perp$ AC, MM' cắt NN' tại I. Gọi H là trực tâm của ΔABC, O là trung điểm của HI. Chứng minh rằng O thuộc đường trung trực của dây DM, O thuộc đường trung trực của dây EN, do đó O là tâm của đường tròn đi qua sáu điểm D, M, N, E, F, P; điểm I đối xứng với H qua O.



Chứng minh tương tự, MM' cắt PP' tại I' thì I' đối xứng với H qua tâm đường tròn nói trên. Suy ra $I \equiv I'$. Vậy PP' cũng đi qua I.

34. Kẻ các đường trung tuyến CM, DN của ΔACD, chúng cắt nhau ở E.

Gọi G là giao điểm của CD và AO, G là trọng tâm của ΔABC.



Ta có:

$\frac{CE}{CM} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG // AB$.

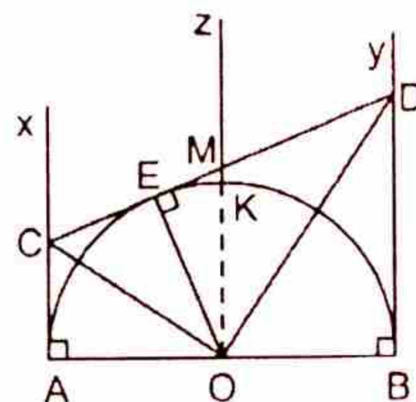
Ta lại có $OD \perp AB$ nên $EG \perp OD$. (1)

Ta có $GO \perp BC$ mà $BC // DN$ nên $OG \perp DN$ tức là $OG \perp DE$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trực tâm của ΔODE, do đó $OE \perp DG$, tức là $OE \perp CD$.

35. a. ΔCOD vuông có OE là đường cao. Ta có $AC.BD = EC.ED = OE^2 = R^2$.

b. OM là đường trung bình của hình thang ACDB nên OM // Ax // By. Điểm M chạy trên tia Kz song song cách đều hai tia Ax, B (K thuộc nửa đường tròn tâm O).



c. $S_{ACDB} = \frac{AC + BD}{2}.AB = OM.2R \geq OK.2R = 2R^2$.

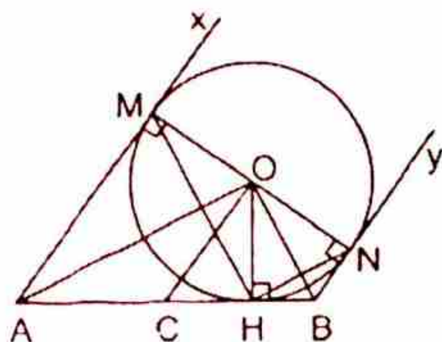
$\min S_{ACDB} = 2R^2 \Leftrightarrow M \equiv K$. Khi đió ACDB là hình chữ nhật.

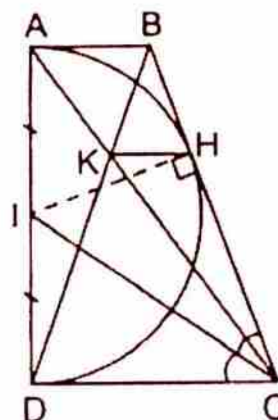
36. a. Tâm O là giao điểm của các tia phân giác của các góc A và B.

b. $\widehat{AOB} = 90^0$.

c. Gọi C là trung điểm AB. Ta có OM và ON cùng vuông góc với OC.

d. $HM = HN \Leftrightarrow HO \perp MO \Leftrightarrow \widehat{MAH} = 90^0 \Leftrightarrow Ax \perp AB, By \perp AB$.





37. a. Kẻ $IH \perp BC$. Chứng minh rằng $H \in (I)$.

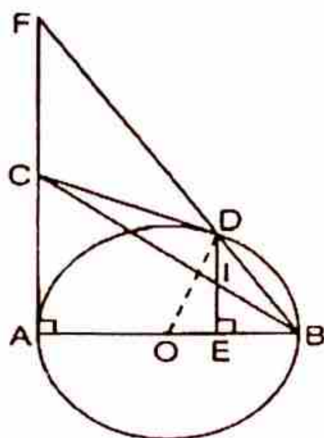
b. Hãy chứng minh $\widehat{BIC} = 90^0$ để suy ra $AB.CD = HB.HC = IH^2 = a^2$.

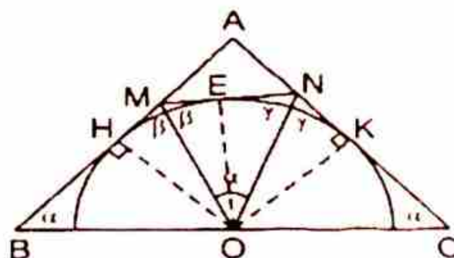
c. Theo tính chất của tiếp tuyến và định lý Ta-lét ta có: $\frac{BH}{HC} = \frac{BA}{DC} = \frac{BK}{KD}$.

Suy ra KH // DC (định lý Ta-lét đảo).

38. Gọi F là giao điểm của BD và AC. Ta có $\frac{IE}{AC} = \frac{ID}{CF}$ (cùng bằng $\frac{BI}{BC}$) mà

$AC = CF \Rightarrow IE = ID$





39. a. Ta có $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{HOK} = \frac{180^0 - \widehat{A}}{2}$. Do đó $\widehat{MON} = \widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$

b. $\Delta BMO \sim \Delta OMN$ (g.g).; $\Delta OMN \sim \Delta CON$ (g.g).

c. ΔBMO và ΔCON đồng dạng $\Rightarrow \frac{BM}{CO} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM.CN = BO.CO = a^2$.

d. Tích BM.CN không đổi nên tổng BM + CN nhỏ nhất khi và chỉ khi BM = CN. Khi đó tiếp tuyến MN song song với BC.

40. a. M, A, N thẳng hàng.

Tứ giác BMNC là hình thang, $S_{BMNC} = 2S_{ABC}$.

Tính AH được 30cm. Đáp số: $S_{BMNC} = 1950cm^2$.

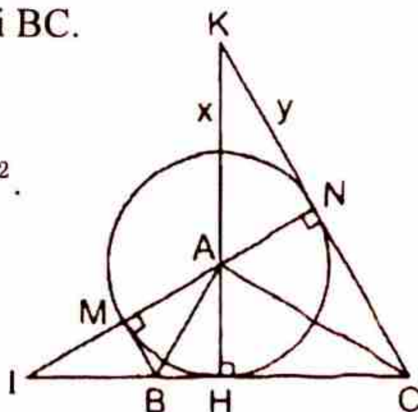
b. Đặt AK = x, KN = y.

Ta có $\Delta KNA \sim \Delta KHC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{KN}{KH} = \frac{AN}{CH} \Rightarrow \frac{x}{y+45} = \frac{y}{x+30} = \frac{2}{3}$.

Từ đó suy ra x = 78cm, y = 72cm.

c. Đáp số: IM = 48cm, IB = 52cm.



41. Dễ dàng tính được DE = 5cm.

Ta có:

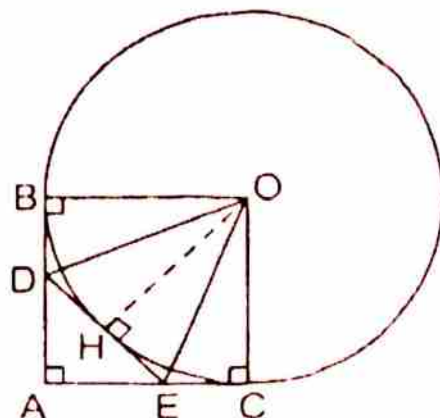
$S_{ODE} = S_{ABOC} - S_{ADE} - S_{OBD} - S_{OCE}$

$S_{ODE} = 36 - 6 - 6 - 9 = 15(cm^2)$.

Kẻ $OH \perp DE$, ta có:

$OH = 2S_{ODE} : DE = 2.15 : 5 = 6(cm)$.

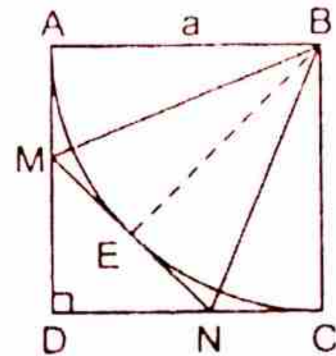
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



42. a. Chu vi ΔDMN bằng 2a.

b. $\widehat{MBN} = 45^0$.

c. Ta có MN < DM + DN



$\Rightarrow MN + MN < DM + DN + MN = 2a$ (câu a)

$\Rightarrow 2MN < 2a \Rightarrow MN < a$.

Ta có MN > DM, MN > DN nên

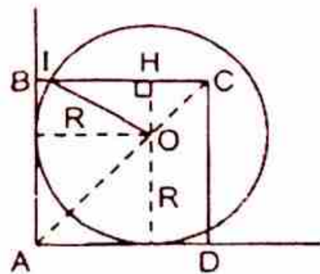
$2MN > DM + DN$

$\Rightarrow 3MN > DM + DN + MN = 2a$ (câu a)

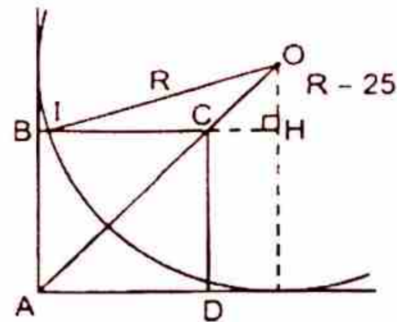
$\Rightarrow MN > \frac{2a}{3}$.

43. Kẻ $OH \perp BC$. Gọi bán kính của (O) là R

Ta có $OH = 25 - 4$ (nếu O thuộc đoạn thẳng AC, h.a) hoặc $OH = R - 25$ (nếu O thuộc tia đối của tia CA, h.b). Gọi I là giao điểm của (O) với cạnh BC, ta có OI = R, IH = R – 2.



a)



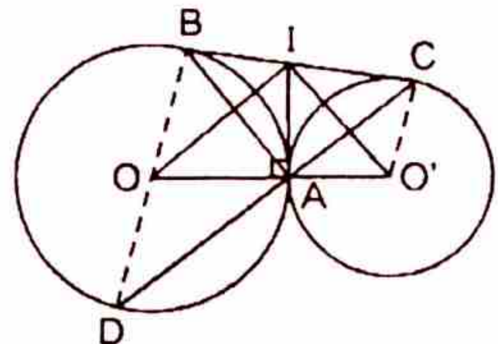
b)

Trong ΔOHI vuông: $IH^2 + OH^2 = OI^2$ nên $(R-2)^2 + (25-R)^2 = R^2$.

Đưa về phương trình $R^2 - 54R + 629 = 0 \Leftarrow (R-37)(R-17) = 0$

Vậy R = 17cm hoặc R = 37cm.

44. a. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt BC ở I. Ta có IB = IA = IC nên $\widehat{BAC} = 90^0$.



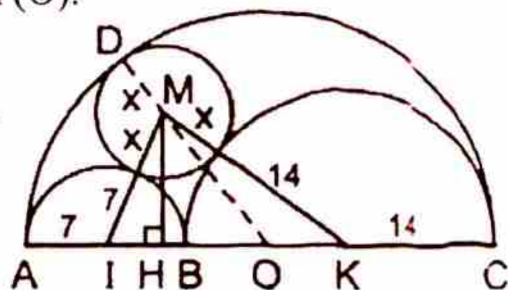
b. $IO \perp IO'$ (tia phân giác của hai góc kề bù) nên $\widehat{OIO'} = 90^0$. tam giác IOO' vuông, đường cao IA nên $IA^2 = OA.O'A = Rr$.

Do đó $BC = 2IA = 2\sqrt{Rr}$.

c. Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$ nên $\widehat{BAD} = 90^0$. Tam giác ABD vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) nên BD là đường kính $\Rightarrow$ 3 điểm thẳng hàng.

45. Gọi D là giao điểm của OM và đường tròn (O).

Ta có:



$OA = OD = OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{14+28}{2} = 21(cm).$

$OIOA - IA = 21 - 7 = 14(cm).$

$OK = OC - KC = 21 - 14 = 7(cm),$

$IK = 14 + 7 = 21(cm).$

Gọi bán kính của đường tròn (M) là x. Ta có IM = x + 7, MK = x + 14,

$MO = OD - MD = 21 - x.$

Cách 1. Kẻ $MH \perp AC$. Ta có

$HK^2 - HI^2 = MK^2 - MI^2 = (x+14)^2 - (x+7)^2 = 7(2x+21)$

Ta lại có $HK + HI = IK = 21$, suy ra $HK - HI = \dfrac{1}{2}x + 7.$ (1)

Ta có $HO^2 - HI^2 = MO^2 - MI^2 = (21-x)^2 - (x-7)^2 = 28(14-2x).$

Ta lại có $HO + HI = OI = 14$, suy ra $HO - HI = 2(14-2x)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $HK - HO = \dfrac{2}{3}x + 7 - 2(14-2x) = 7\left(\dfrac{2}{3}x - 3\right).$

Ta lại có $HK - HO = OK = 7$, suy ra $\dfrac{2}{3}x - 3 = 1.$ Vậy x = 6.

Bán kính đường tròn (M) bằng 6cm.

Cách 2: Kẻ $MH \perp AC$. Gọi thêm HI = y. Ta có:

$HK^2 - HI^2 = MK^2 - MI^2 \Leftrightarrow (21-y)^2 - y^2 = (x+14)^2 - (x+7)^2$

$\Leftrightarrow 21(21-2y) = 7(2x+21).$

Rút gọn được $x + 3y = 21$ (3)

Ta lại có $HO^2 - HI^2 = MO^2 - MI^2 \Leftrightarrow (14-y)^2 - y^2 = (21-x)^2 - (x-7)^2$

$\Leftrightarrow 14(14-2y) = 28(14-2x).$

Rút gọn được $2x - y = 7.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra x = 6, y = 5. Bán kính đường tròn (M) bằng 6cm.

Cách 3. Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với độ dài các cạnh a, b, c và nửa chu vi p.

Chu vi tam giác MOI bằng $14 + (21-x) + (x+7) = 42(cm).$

Chu vi tam giác MOK bằng $7 + (21-x) + (x+14) = 42(cm).$

Do $IO = 2OK$ nên $S_{MOI} = 2S_{MOK}$, tức là $S_{MOI}^2 = 4S_{MOK}^2$.

Ta có $S_{MOI}^2 = 21(21-14)[21-(21-x)][21-(x+7)] = 21.7x(14-x)$

$S^2_{MOK} = 21(21-7)\left[21-(21-x)\right]\left[21-(x+14)\right] = 21.14x(7-x)$.

Do $S^2_{MOI} = 4S^2_{MOK}$ nên $21.7x(14-x) = 4.21.14x(7-x)$.

Từ đó x = 6. Bán kính đường tròn (M) bằng 6cm.

46. a. Ta có:

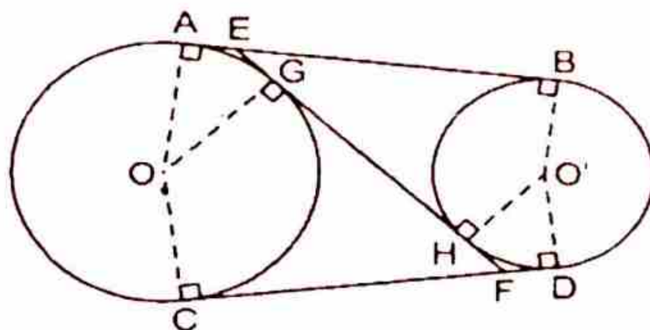
AB + CD = (AE + EB) + (CF + FD) = (AE + CF) + (EB + FD)

= (EG + GF) + (EH + HF) = EF + EF = 2EF. (1)

Ta lại có AB = CD (đối xứng nhau qua OO').

Nên AB + CD = 2AB. (2).

Từ (1) và (2) suy ra AB = EF.



b. Ta có:

EG + EH = EA + EB = AB

nên 2EG + GH = AB. (3).

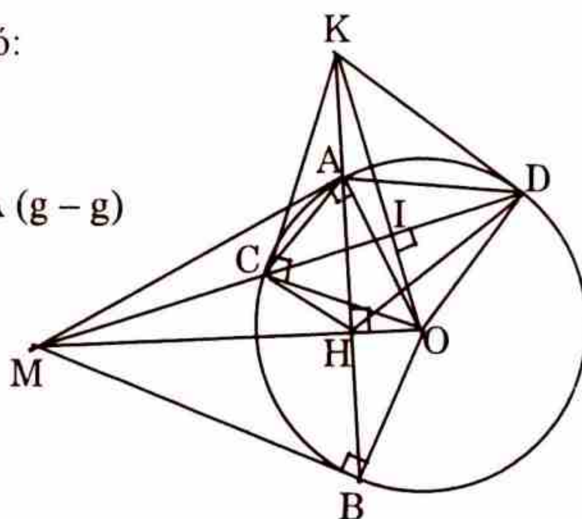
Tương tự 2FH + HG = CD. (4)

Vì AB = CD nên từ (3) và (4)

suy ra 2EG = 2FH.

Do đó EG = FH.

47. a. Xét hai tam giác MAC và MDA có:



$\widehat{M}$ chung: $\widehat{MAC} = \widehat{MDA} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AC}$.

Suy ra ΔMAC đồng dạng với ΔMDA (g – g)

$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$

$\Rightarrow MA^2 = MC.MD$.

b. * MA, MB là tiếp tuyến của (O)

nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$

* I là trung điểm dây CD nên $\widehat{MIO} = 90°$.

Do đó: $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 90° \Rightarrow$ 5 điểm M, A, O, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

c. Ta có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R_{(O)}$.

Do đó MO là trung trực của AB ⇒ MO ⊥ AB.

Trong ΔMAO vuông tại A có AH là đường cao ⇒ $MA^2 = MH.MO$. Mà $MA^2 = MC.MD$ (do a)) ⇒ MC.MD = MH.MO ⇒ $\frac{MH}{MD} = \frac{MC}{MO}$ (1).

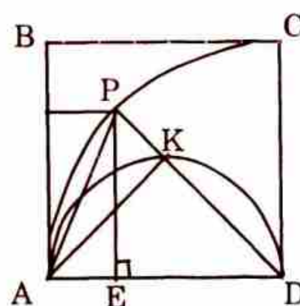
Xét Δ MHC và ΔMDO có: $\widehat{M}$ chung, kết hợp với (1) ta suy ra ΔMHC và ΔMDO đồng dạng (c–g –c)⇒ $\widehat{MHC} = \widehat{MDO} \Rightarrow$ Tứ giác OHCD nội tiếp.

Ta có: ΔOCD cân tại O $\Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{MDO}$; $\widehat{OCD} = \widehat{OHD}$ (do OHCD nội tiếp). Do đó $\widehat{OHD} = \widehat{MDO}$ mà $\widehat{MDO} = \widehat{MHC}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{OHD}$

$\Rightarrow 90^0 - \widehat{MHC} = 90^0 - \widehat{OHD} \Rightarrow \widehat{CHA} = \widehat{DHA} \Rightarrow$ HA là phân giác của $\widehat{CHD}$ hay AB là phân giác của $\widehat{CHD}$.

d. Tứ giác OCKD nội tiếp (vì $\widehat{OCK} = \widehat{ODK} = 90$) $\Rightarrow \widehat{OKC} = \widehat{ODC} = \widehat{MDO}$ mà $\widehat{MDO} = \widehat{MHC}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{OKC} = \widehat{MHC} \Rightarrow$ OKCH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KHO} = \widehat{KCO} = 90 \Rightarrow KH \perp MO$ tại H mà $AB \perp MO$ tại H $\Rightarrow$ HK trùng AB $\Rightarrow$ K, A, B thẳng hàng.

48..a. $\widehat{AKD} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). ΔPAD cân (DA = DP) nên $\widehat{PAE} = \widehat{APK}$. Hai tam giác vuông PAE và APK có:

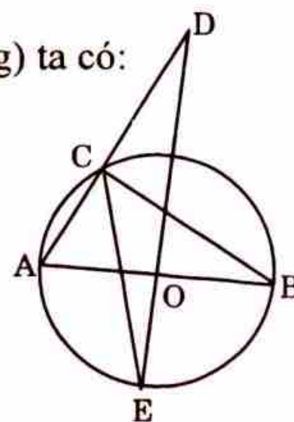


Cạnh huyền PA chung; $\widehat{PAE} = \widehat{APK}$ nên
$\Delta PAE = \Delta APK$.
Suy ra PK = AE. (1)

b. $\hat{I} = \hat{E} = \hat{K} = 90^0$, ta có 3 góc cùng nhìn AD một góc $90^0 \Rightarrow$ I, E, K, A, P thuộc cùng một đường tròn.

c. Tứ giác AIPE có $\hat{A} = \hat{I} = \hat{E} = 1v$, suy ra AIPE là hình chữ nhật, do đó AE = PI (2)
Từ (1) và (2) ta được PI = PK.

49. a. $AD^2 = OD^2 + OA^2$; $AD^2 = 5a^2$ vậy $AD = a\sqrt{5}$.



Hai tam giác vuông ACB và AOD đồng dạng ($\hat{A}$ chung) ta có:

$\frac{AC}{AO} = \frac{AB}{AD}$ hay $\frac{AC}{a} = \frac{2a}{a\sqrt{5}}$. Vậy $AC = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$\frac{AC}{AO} = \frac{BC}{DO}$ hay $\frac{AC}{AO} = \frac{BC}{2AO}$. Vậy $BC = 2AC = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$.

b. $\widehat{ACB} = 1v$ nên C thuộc đường tròn đường kính AB = 2a và có tâm là O. Đường tròn này qua E vì OE = OA = OB = a.

c. OE vuông góc với đường kính AB nên phải qua trung điểm của cung bị chắn AEB. Do đó CE là phân giác của góc vuông ACB.

50. a. Kẻ O'L // BC, O'C và OB song song nên O'L = BC.

Ta có $O'L^2 = BC^2 = OO'^2 - OL^2$; $O'L^2 = BC^2 = (R + R')^2 - (R - R')^2$

$BC^2 = 4RR'$ suy ra $BC = 2\sqrt{RR'}$

b. $S_{OBCO'} = \frac{R + R'}{2}.2\sqrt{RR'} = (R + R')\sqrt{RR'}$

c. Diện tích giới hạn bởi BC và hai cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$ bằng diện tích tứ giác OBCO' trừ cho diện tích hai quạt tròn AOB và AO'C.

* Khi $R' = \frac{R}{3}$ thì $S_{OBCO'} = 4R'^2\sqrt{3}$

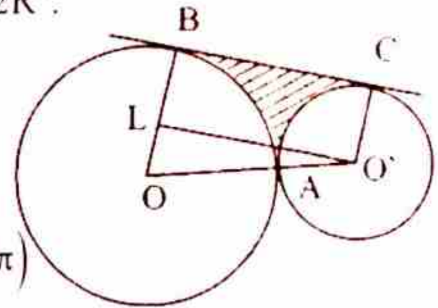
* Trong Δ vuông OLO' có: OO' = 4R'; OL = 2R'.

Như vậy OO' = 2OL suy ra $\widehat{AOB} = 60^0$

và $\widehat{AO'C} = 120^0$

Từ đó tính được diện tích phải tìm là:

$$S = 4R'\sqrt{3} - \left(\frac{9\pi R'^2}{6} + \frac{\pi R'^2}{3}\right) = \frac{R'^2}{6}\left(24\sqrt{3} - 11\pi\right)$$



51. a. Theo giả thiết $\widehat{A} = \widehat{C} + 90^0$. Ta có

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow \widehat{C} + 90^0 + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$; $\widehat{C} = 45 - \frac{\widehat{B}}{2}$. Vậy $\widehat{C} < 45^0$

b. Trong ΔBHA có $\widehat{HAB} = 180^0 - (90^0 + \widehat{C})\ \ 90^0 - \widehat{C}$

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (số đo 2 góc này cùng bằng $\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$)

Do đó $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^0 - \widehat{C} + \widehat{C} = 90^0$. Suy ra $\widehat{H} = 90^0$.

c. Hai tam giác vuông CBH và BAH đồng dạng (có góc nhọn bằng nhau) nên có $\frac{BH}{CH} = \frac{AH}{BH}$ hay $BH^2 = AB.CH$

d. Ta có OB // CH (vì cùng vuông góc với HB). Do đó $\widehat{B}_1 = \widehat{C}$ mặt khác $\widehat{B}_1 = \widehat{OBC}$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{OBC} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC'} \Rightarrow$ AB = BC', C' là giao điểm của tia CO với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.

Trong Δ vuông CBC': $BC'^2 + BC^2 = CC'^2 = 4R^2$

Hay $AB^2 + AC^2 = 4R^2$

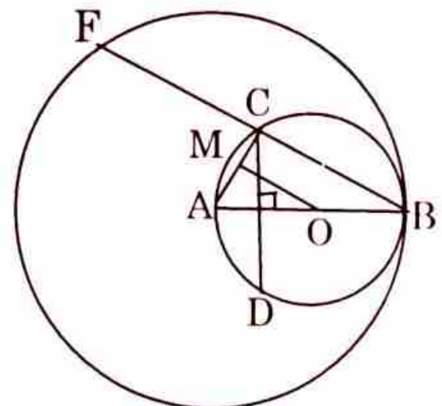
52. a. Ta có $\widehat{ACB} = 1v$ vì vậy góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB. Vậy AC $\perp$ BF. Suy ra trong đường tròn tâm A, đường kính AC chia đôi dây BF.

CB = CF.

b. Trong đường tròn tâm O, đường kính AB vuông góc với dây CD nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$.

sđ$\widehat{CBA}$ = sđ$\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, sđ$\widehat{ACD}$ = sđ$\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$.

Vậy $\widehat{CBA} = \widehat{ACD}$.



c. CM là đường trung bình của ΔABC nên OM // BC, do đó $BC \perp AC$ thì $OM \perp AC$ suy ra $\widehat{M} = 1v$. Vậy M nhìn AO cố định dưới 1 góc vuông nên M chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AO (nửa đường tròn này và nửa đường tròn ACB cùng ở một phía của đường thẳng AB).

53.a. $\Delta ABC = \Delta ADE$

(AB = AD, AC = AE, $\widehat{A}$ chung)

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{AED}$

Mặt khác: $CD = AD - AC$; $BE = AB - AE$ nên CD = BE. Từ trên suy ra $\Delta CDH = \Delta BHE$ (g.c.g).Do đó được: HC = HE.; $\Delta AHC = \Delta AHE$ vì có HC = HE, AH chung,AC = AE. Suy ra $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$

b. sđ$\widehat{DAH}$ = sđ$\dfrac{\overset{\frown}{KC}}{2}$, sđ$\widehat{BAH}$ = sđ$\dfrac{\overset{\frown}{KB}}{2}$, mà $\widehat{DAH} = \widehat{BAH}$ nên $\overset{\frown}{KC} = \overset{\frown}{KB}$: suy ra $OK \perp BC$.

c. Ta có $\widehat{ACB} = 1v$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Vì $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{AED} = 1v$. Tứ giác ACHE có tổng 2 góc đối: $\widehat{ACH} + \widehat{AEH} = 2v$ nên là tứ giác nội tiếp.

d. Ta có $\widehat{AKB} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Delta DAK = \Delta KAB$ vì có AB chung, AD = AB, $\widehat{DAK} = \widehat{KAB}$. Suy ra $\widehat{AKD} = \widehat{AKB} = 1v$.

Vậy $\widehat{BKD} = \widehat{AKB} + \widehat{AKD} = 2v$ nên B, K, D thẳng hàng.

54. a. – Hai tam giác OCA và ECB đồng dạng cho ta: $\dfrac{OA}{EB} = \dfrac{CA}{CB}$

- Hai tam giác AOD và BFD đồng dạng cho ta:

$\dfrac{OA}{BF} = \dfrac{DA}{DB}$.

Theo giả thiết: $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$.

Nên $\dfrac{OA}{EB} = \dfrac{OA}{BF} \Rightarrow EB = BF$

b. Qua B' kẻ E'B'F' song song với EBC. Ta dễ dàng chứng minh được B'E' = B'F'. Hai tam giác OA'C' và E'B'C' đồng dạng, cho ta $\dfrac{C'A'}{C'B'} = \dfrac{OA'}{E'B'}$. Hai tam giác OA'D' và F'B'D' đồng dạng, cho ta $\dfrac{D'A'}{D'B'} = \dfrac{OA'}{B'F'}$. Vì E'B' = B'F' nên $\dfrac{OA'}{E'B'} = \dfrac{OA'}{B'F'}$, suy ra : $\dfrac{C'A'}{C'B'} = \dfrac{D'A'}{D'B'}$

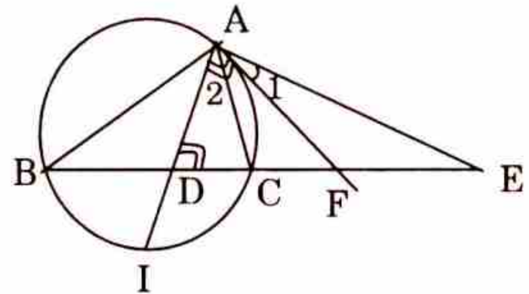
55. a. Trong ΔAFD ta có: $sđ\widehat{D} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{IB}}{2}$

$sđ\widehat{A} = sđ\dfrac{\overset{\frown}{ACI}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{CI}}{2}$; $sđ\widehat{A} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{IB}}{2}\left(\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{CI}\right)$

Vậy $\widehat{D} = \widehat{A}$ suy ra tam giác AFD cân đỉnh F.

Trong tam giác AFE: $\widehat{A}_1 = 90^0 - \widehat{A}_2; \widehat{E} = 90^0 - \widehat{A}_2$ (vì $\widehat{DAE} = 90^0$).

Vậy: $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$ và AF = FE suy ra: $\dfrac{FD}{FE} = 1$

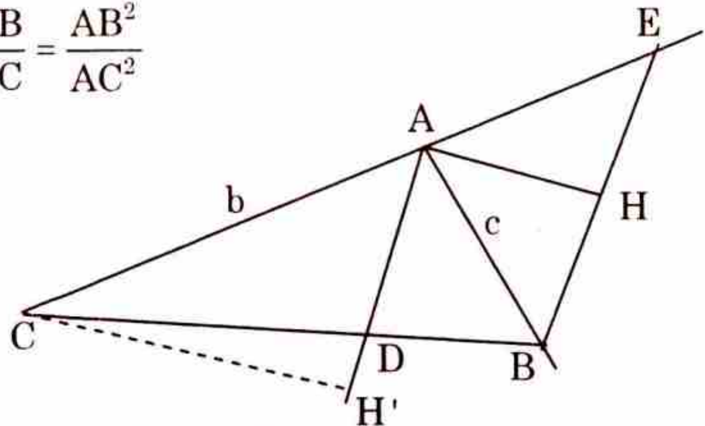


b. Tam giác AFB và AFC đồng dạng vì có:

$\widehat{B} = \widehat{CAF} = sđ\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ và góc $\widehat{F}$ chung.

Do đó $\dfrac{S_{AFB}}{S_{AFC}} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Hai tam giác AFB và AFC có chung đường cao xuất phát từ A, do đó ta cũng có: $\dfrac{S_{AFB}}{S_{AFC}} = \dfrac{FE}{FC}$ do đó: $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$



56. a. $\widehat{ABE} = \widehat{AEB} = 45^0$.

Vậy AE = AB và $BE = c\sqrt{2}$

b. Ta có: $\dfrac{AD}{BE} = \dfrac{CA}{CE}$ suy ra

$AD = \dfrac{CA.BE}{CE} = \dfrac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

c. Đường cao AH của hình thang bằng $\dfrac{BE}{2} = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$.

Vậy: $S_{ADBE} = \dfrac{AD + BE}{2}.AH = \dfrac{c^2(2b+c)}{2(b+c)}$; $CH' = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ ($\Delta AH'C$ vuông cân).

Vậy: $S_{ACD} = \dfrac{AD.CH'}{2} = \dfrac{b^2c}{2(b+c)}$

57.a. Δ vuông ABD và ACD có cạnh huyền chung AD và cạnh góc vuông AB = AC nên bằng nhau. Suy ra DB = DC.Tứ giác ABCD có $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 1v + 1v = 2v$. Vậy nó nội tiếp được trong một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{BCD} = 180^0 - \widehat{A} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

b. $\widehat{BDC} = 120^0$ suy ra $sđ\overset{\frown}{BMC} = 120^0$ suy ra $\overset{\frown}{BMC} = \dfrac{1}{3}$ đường tròn nên $\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}240^0 = 120^0$. Tứ giác AEMF có $\widehat{EMF} + \widehat{A} = \widehat{BMC} + \widehat{A} = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác EMF đi qua điểm A cố định khi M chuyển động trên cạnh nhỏ BC của đường tròn tâm D.

c. $\Delta ABE = \Delta BCF$ ($AB = AC$, $\widehat{ABE} = \widehat{BCF}, \widehat{A} = \widehat{CBF} = 90^0$)

Suy ra AE = BF.

58. a. $DE \perp OC \Rightarrow ME = MD$, tứ giác AEBD là hình thoi vì có 2 đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b. $\widehat{ADC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn O) nên $DC \perp AD$ mà AD // BE suy ra $BE \perp DC$.

$\widehat{BFC} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn O') nên $BF \perp DC$. Vậy BF và BE cùng qua B và cùng vuông góc với DC nên phải trùng nhau nghĩa là B, F, E thẳng hàng.

c. M và F cùng nhìn BD dưới một góc vuông nên tứ giác BDMF là tứ giác nội tiếp.

d. BM và DF là đường cao của tam giác BDE nên C là trực tâm, do đó $CE \perp BD$ mà $CG \perp BD$ ($\widehat{CGB} = 1v$) suy ra E, C, G thẳng hàng.

Vậy DF, EG, AB đồng quy.

e. Tam giác vuông DFE có M là trung điểm của cạnh huyền DE nên trung tuyến $MF = \frac{1}{2}DE$. Từ đó $\widehat{F}_1 = \widehat{D}_1; \widehat{F}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

Nên $\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = \widehat{D}_1 + \widehat{C}_2 = 90^0$.

Vậy $\widehat{MFO'} = 1v \Rightarrow MP$ là tiếp tuyến của đường tròn O'.

59. a. Đường thẳng OO' là trung trực của dây AD.

Do đó: $\widehat{ABD} = \widehat{AOO'}$

(số đo bằng sđ $\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$)

cũng thế: $\widehat{ACD} = \widehat{AO'O}$.

Vậy $\Delta AOO' \sim \Delta ABC$

b. $\Delta AOO' \sim \Delta ABC$ nên

$\frac{OA}{O'A} = \frac{AB}{AC}; \frac{R}{R'} = \frac{AB}{AC}$.

Vậy tỉ số $\frac{R}{R'}$ không phụ thuộc vào vị trí của D trên BC.

c. Trong tam giác ACB: $OA + OB \geq AB \Rightarrow 2R \geq AB \Rightarrow R \geq \frac{AB}{2}$,

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là $\frac{AB}{2}$.

* Chứng minh tương tự, giá trị nhỏ nhất của R' là $\frac{AC}{2}$. Khi đó tâm O và O', lần lượt là trung điểm của AB và AC. Đường thẳng OO' song song với BC và AD là đường cao của ΔABC.

60. a. Ta có AB = CB = BD = DA.

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 1v$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Vậy ACBD là hình vuông.

b. $AC = R\sqrt{2} = 1,6.\sqrt{2} = 2,2627(m)$; $OF = \frac{R\sqrt{2}}{2} = 1,1323(m)$

c. Diện tích hình thang AOCE $= \frac{AE + OC}{2}.OA$

ΔAEB vuông cân nên AE = AB = 2R; $S_{AOCE} = \frac{3R}{2}.R = \frac{3R^2}{2}$

Diện tích quạt tròn AOC $= \frac{\pi R^2}{4}$. Diện tích giới hạn bởi AE, CE và cung AC là: $\frac{3R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{R^2}{4}(6 - \pi) = 1,8294(m^2)$

61. a. Ta có: $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ (đồng vị), $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (so le trong).

Vì $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ suy ra EA = AB; ΔEAB vuông cân nên có $EB = AB\sqrt{2} = c\sqrt{2}$.

Mặt khác theo Talét:

$\frac{AD}{EB} = \frac{CA}{CE} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow AD = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

b. Vì AD' song song với BK nên:

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_3$ (so le trong);

$\widehat{K}_1 = \widehat{A}_4$ (đồng vị)

Vì $\widehat{B}_1 = \widehat{K}_1$ nên $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 \Rightarrow$ AD' là phân giác ngoài của $\widehat{A}$.

$BK = AB\sqrt{2} = c\sqrt{2}$. Mặt khác $\frac{AD'}{BK} = \frac{CA}{CK} = \frac{b}{b-c} \Rightarrow AD' = \frac{bc\sqrt{2}}{b-c}$

62. a. Ta có: trong tam giác vuông ABC

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 18^2 = 900$

Vậy BC = 30mm $\Rightarrow$ MC = 15mm.

b. Tam giác vuông DMC và BAC đồng dạng vì có chung góc $\widehat{C}$.

Ta có: $\frac{DC}{BC} = \frac{DM}{AB} = \frac{MC}{AC}$

$\Rightarrow DC = \dfrac{BC.MC}{AC} = \dfrac{30.15}{18} = 25mm$; $DM = \dfrac{AB.MC}{AC} = 20mm$.

c. Tam giác vuông BEM và BCA đồng dạng.

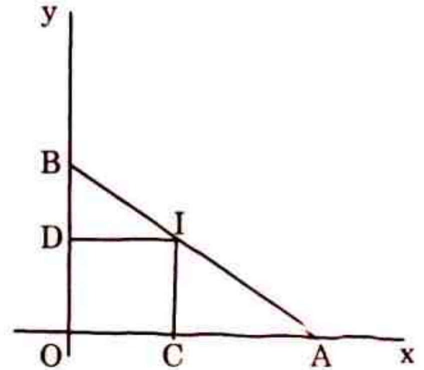
Ta có: $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BM}{AB} \Rightarrow BE = \dfrac{BC.BM}{AB} = 18,75mm$

d. $\widehat{EAC} = \widehat{EMC} = 1v$. Suy ra A và M thuộc đường tròn đường kính EC.
Điểm E thuộc trung trực của BC nên: EC = BE = 18,75

$\Rightarrow r = 9,375mm$.

63. a. Tam giác vuông IAC, BAO và BID đồng dạng, ta có:

$\dfrac{AC}{IC} = \dfrac{ID}{DB} \Rightarrow AC.DB = IC.ID = a^2$



b. Mặt khác ta cũng có:

$\dfrac{AC}{IC} = \dfrac{OA}{OB}$ (1) và $\dfrac{ID}{DB} = \dfrac{OA}{OB}$ (2)

Nhân vế với vế của (1) và (2):

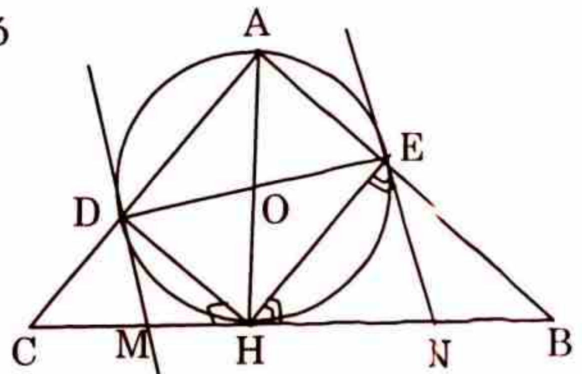
$\dfrac{AC}{DB} = \dfrac{OA^2}{OB^2}$

c. $S_{OAB} = \dfrac{8a^2}{3} \Rightarrow OA.OB = \dfrac{16a^2}{3} \Rightarrow (a + CA)(a + DB) = \dfrac{16a^2}{3}$

$\Rightarrow a^2 - a(CA + DB) + CA.DB = \dfrac{16a^2}{3}$. Nhưng $CA.DB = a^2$ nên: $CA + DB = \dfrac{10a}{3}$

Từ $CA.DB = a^2$; $CA + DB = \dfrac{10a}{3}$, ta có

$CA = \dfrac{a}{3}; DB = 3a$. $CA = 3a; DB = \dfrac{a}{3}$.



64. a. Trong Δ vuông ABC

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25^2 + 21^2 = 1225$

$BC = \sqrt{1225} = 35(mm)$

Từ: b.c = ah ta có: $h = \dfrac{bc}{a} = \dfrac{28 \times 21}{35} = 16,80(mm)$

b. Tứ giác ADHE là hình chữ nhật vì có các góc đều bằng 1v (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

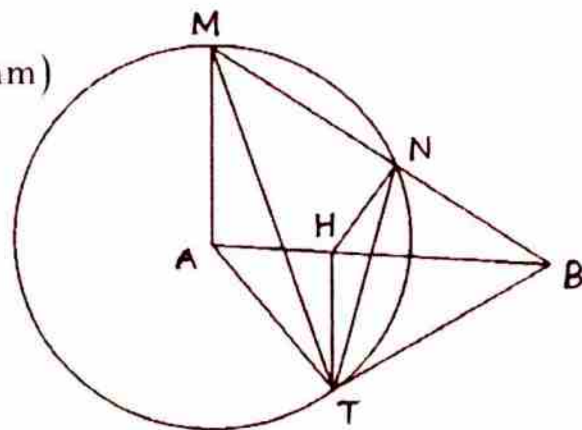
$\Delta AHE \sim \Delta ABC$ nên có: $\dfrac{HE}{AB} = \dfrac{AH}{BC} \Rightarrow HE = \dfrac{AB.AH}{BC} = 13,44(mm)$

Tương tự:

$\frac{AE}{AC} = \frac{AH}{BC} \Rightarrow AE = \frac{AC.AH}{BC} = 10,05(mm)$

Từ đó được:

$S_{ADHE} = HE.AE = 135,47(mm^2)$



c. Tam giác NEH cân ($\widehat{HEN} = \widehat{EHN}$) suy ra EN là trung tuyến của Δ vuông HEB. Vậy $NH = \frac{BH}{2}$.

Tương tự: $HM = \frac{CH}{2}$. Do đó $MN = \frac{BH}{2} + \frac{CH}{2} = \frac{BC}{2}$

65. a. Dễ dàng chứng minh được $\Delta MBT \sim TBN$

$\frac{MB}{BT} = \frac{BT}{BN} \Rightarrow BT^2 = BM.NB.$

b. ΔABT là tam giác vuông $\hat{T} = 1v$ mà $TH \perp AB \Rightarrow BT^2 = BH.BA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BM.BN = BH.BA. (*)

c. ΔABM và ΔNHB có $\hat{B}$ chung, từ hệ thức (*) suy ra $\frac{AB}{NB} = \frac{BM}{BH}$.

Vậy $\Delta ABM \sim \Delta NHB$ (t.h.2) $\Rightarrow \widehat{HNB} = \widehat{MAB}$

Vậy tứ giác AHMN nội tiếp.

66. a. Hai tam giác ABC và DBA có $\widehat{BAC} = \widehat{ADB}$ và $\widehat{DAB} = \widehat{ACB}$.

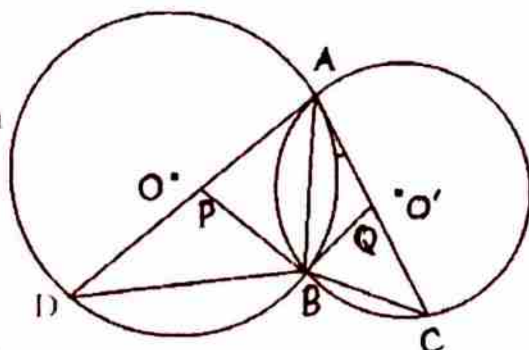
Vậy: $\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BD}(*)$

b. ΔBDP và ΔBAQ có $\widehat{BAC} = \widehat{ADB}$ (chứng minh trên).

Từ hệ thức (*) ta có thể viết:

$\frac{\frac{AC}{2}}{\frac{AD}{2}} = \frac{AB}{BD}$ hay $\frac{AQ}{PD} = \frac{AB}{BD}$ (vì P và Q lần lượt là trung điểm của AD và AC).

Vậy $\Delta BDP \sim \Delta BAQ \Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{AQB}$.



c. $\widehat{APE} + \widehat{BPD} = 2v$ (hai góc kề bù nhau) mà

$\widehat{BPD} = \widehat{AQB} \Rightarrow \widehat{APB} + \widehat{AQB} = 2v \Rightarrow$ Tứ giác APBQ nội tiếp được.

67. a. Ta có PM = PB (định lý); OM = R = OB nên OP là trung trực của MB, do đó $OP \perp MB$. Ta lại có $\widehat{AMB} = 90^0$ (nội tiếp chắn đường kính). Vậy AM // OP (vì cùng $\perp$ MB) và AMPO là hình thang.

b. Ta có $\Delta SOB = \Delta QOM$ (g.c.g) và OS = OQ.

Vậy: $\dfrac{OS}{OQ} = 1 = \dfrac{OM}{OB}$, suy ra SQ // MB (định lý Thales đảo).

c. Vì R_1 đối xứng với R qua AB nên $\widehat{R_1AQ} = \widehat{RAQ}$. Ta lại có AM // OP; MB // SQ; OP ⊥ MB nên AM ⊥ SQ.

Do đó: $\widehat{R_1SQ} = \widehat{RAQ}$ (cạnh tương ứng vuông góc).

Suy ra $\widehat{R_1AQ} = \widehat{R_1SQ}$ và tứ giác $ASQR_1$ nội tiếp được.

d. Gọi giao điểm của tia OP và SQ là P', ta có P'S = P'Q (vì ΔOSQ cân; SQ // MB; OP' ⊥ MB). Do PP' // MB' nên $\dfrac{PQ'}{PQ'} = \dfrac{PP'}{MR'}(1)$

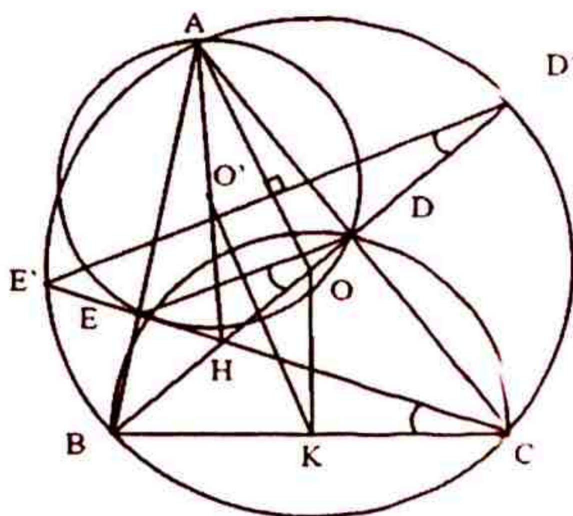
Mặt khác, do OMR'T là hình bình hành nên PR' // MS: PP' // MR' và $\Delta PP'R' \sim \Delta MR'S$ (t.h.1). Suy ra $\dfrac{PP'}{MR'} = \dfrac{PR'}{R'S}(2)$

Kết hợp (2) với (1), được $\dfrac{QP'}{QR'} = \dfrac{PR'}{R'S}$ (3). Do QP' = P'S = P'R' + R'S nên thay vào (3) và nhân chéo, ta được: (P'R' + R'S) R'S = (2P'R' + R'S)P'R'.

Từ đó, $R'S^2 = 2P'R^2$ hay $R'S = P'R'\sqrt{2}$ (vì R'S, P'R' > 0).

Vậy $\dfrac{SM}{OM} = \dfrac{SR'}{R'P'} = \sqrt{2}$ hay $SM = OM\sqrt{2} = R\sqrt{2}; OS = R(1+\sqrt{2})$

68. a. Gọi K là trung điểm của BC, ta có KE = KB = KD = KC (vì $\widehat{BEC} = 90^0 = \widehat{BDC}$), nên B, E, D, C cùng nằm trên đường tròn (K; KB).



b. $\widehat{EDB} = \widehat{E'D'B}$ do cùng bằng $\widehat{E'CB}$ (nội tiếp cùng chắn cung E'B hoặc cung EB), chúng đồng vị với nhau nên E'D' // ED.

c. $\widehat{ACE'} = \widehat{ABD'}$ (cạnh tương ứng vuông góc) do đó $\widehat{AE'} = \widehat{AD'}$. Mà OA là bán kính nên OA ⊥ E'D'. Do ED // E'D', suy ra OA ⊥ ED.

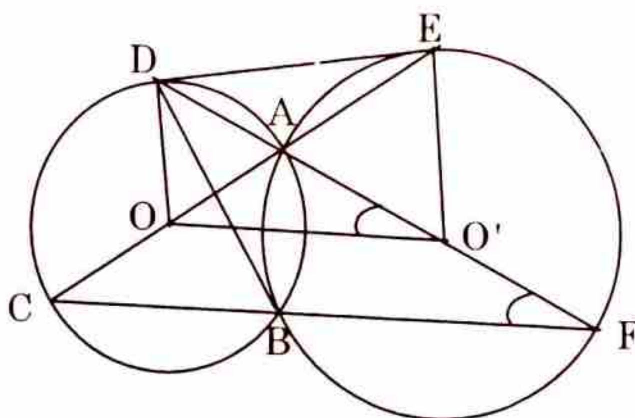
d. Vì K B = KC nên OK ⊥ BC. Gọi giao điểm của BD với CE là H, ta có H là trực tâm của ΔABC, do đó AH = 2OK và $AO' = \dfrac{AH}{2} = OK$ = không đổi, suy ra đpcm.

69. a. Ta có: $\widehat{CBA} = 90^0 = \widehat{FBA}$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn), nên $\widehat{CBA} + \widehat{FBA} = 180^0$ và C, B, F thẳng hàng.

b. Ta có: $\widehat{CDF} = \widehat{CEF} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra tứ giác CDEF nội tiếp đường tròn đường kính CF.

c. Do các tứ giác CDEF, BAEF nội tiếp được nên $\widehat{DEA} = \widehat{BEA}$ (vì cùng bằng $\widehat{DFB}$). Vậy tia EA là phân giác của góc DEB. Tương tự, tia DA là tia phân giác của góc EDB. Suy ra A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE.

d. Gọi giao điểm của AB với OO' là I, ta có OO' ⊥ AB; IA = IB (vì OO' là đường trung trực của AB do OA = OB; O'A = O'B). Do đó O'O // CF (vì cùng ⊥ AB) và $\widehat{DO'O} = \widehat{DFC}$ (đồng vị). Suy ra $\widehat{DO'O} = \widehat{DEO}$ (vì cùng bằng $\widehat{DFC}$) và tứ giác ODEO' nội tiếp được.



Nếu DE tiếp xúc với (O), (O') thì trong tứ giác ODEO' có $\hat{D} = \hat{E} = 90^0$M và $\hat{O} = \widehat{O'} = 90^0$ (vì bù với $\hat{E}, \hat{D}$) hay OEDO' là hình chữ nhật. Vậy OD = O'E và OA = AE. Mà AB // EO' (vì cùng ⊥ OO') nên AI là đường trung bình của ΔOO'E và bằng $\frac{O'E}{2}$; AB = 2AI = EO' = OD (1). Đảo lại với (1), thì dễ thấy rằng DE tiếp xúc (O), (O'). Vậy điều kiện phải tìm là (1).

70. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp. O là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A, D là tiếp điểm của (I) trên BC. Gọi P, F, Q là tiếp điểm của (O) với các đường thẳng AB, BC, AC. Đặt BC = a. AC = b. AB = c. Theo tính chất các tiếp tuyến của đường tròn (O):

CF = CQ = AQ - AC (1);

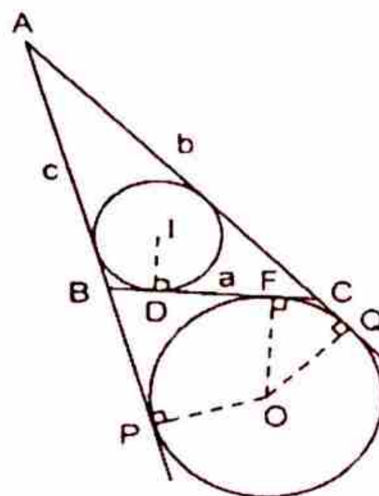
AP + AQ = 2AQ = chu vi ABC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

2CF = 2QA – 2AC

= (a + b + c) – 2b = a + c – b. (3).

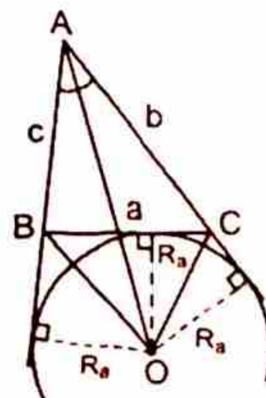
Theo tính chất các tiếp tuyến của đường tròn (I) ta có 2BD = a + c – b. (4). Từ (3) và (4) suy ra CF = BD.



Vậy D và F đối xứng với nhau qua trung điểm

71. Gọi O là tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Ta có: $S_{OAC} + S_{OAB} - S_{OBC} = S_{ABC} \Rightarrow bR_a + cR_a - aR_a = 2S$. (1)



a. Từ (1) suy ra: $S = \dfrac{R_a(b+c-a)}{2} = R_a(p-a)$. (2).

Tương tự: $S = R_b(p-b) = R_c(p-c)$.

b. Chứng minh dựa vào câu a.

c. Do $bh_b = ch_c = ah_a = 2S$ nên từ (1) suy ra:

$$\frac{bR_a}{bh_b} + \frac{cR_a}{ch_c} - \frac{aR_a}{ah_a} = 1 \Rightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{1}{R_a}.$$

72. Gọi H và P là các tiếp điểm trên AC của đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp trong góc vuông A.

Ta có $2AH = AB + AC - BC; 2AP = AB + AC + BC$.

Suy ra $AP - AH = BC$, tức là $BC = R - r$.

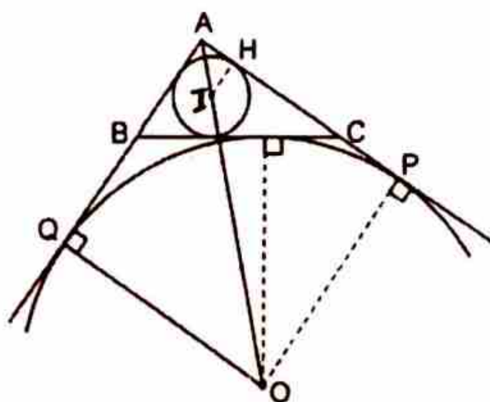
73. a. Ta có BE = CF (cùng bằng nửa chu vi ΔABC).

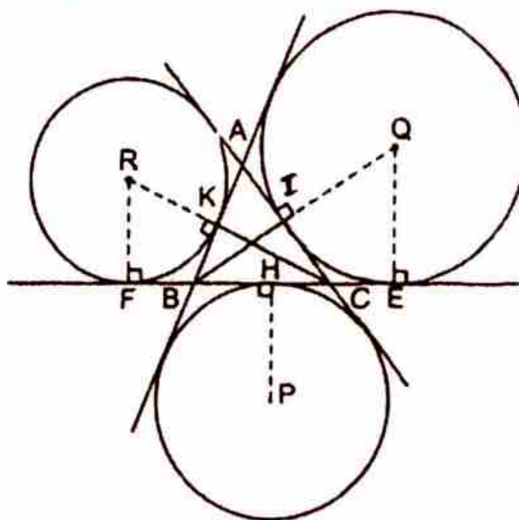
Trừ đi BC, được CE = BF.

b. CE = BF mà CE = CI, BF = BK nên CI = BK.

Ta lại có BI = CK (giả thiết) nên $\Delta BIC = \Delta CKB$ (c.c.c), suy ra $\widehat{B} = \widehat{C}$

Tương tự $\widehat{C} = \widehat{A}$. Vậy ΔABC là tam giác đều.





4. Các bài toán dựng hình, quỹ tích

Một số kiến thức cơ bản

1.Các bước giải một bài toán dựng hình

Phân tích: *Giả thiết hình đó đã dựng được, trước hết vẽ phác một hình gần giống hình cần dựng trên những nét lớn, nếu cần thiết phải vẽ thêm đường phụ. Nghiên cứu tỉ mỉ mối quan hệ giữa điều kiện đã biết và điều kiện chưa biết trong hình, từ đó đưa ra cách dựng phù hợp.*

Cách dựng: *Trình bày các bước dựng dựa trên kết quả được phân tích Các bước dựng phải là bước dựng cơ bản đã biết, hoặc bài toán dựng cơ bản, được trình bày theo đúng thứ tự đã được phân tích.*

Chứng minh: *Ở đây chúng ta cần chứng minh hình vừa dựng là hình cần dựng,tức là chứng minh hình vừa dựng hoàn toàn phù hợp với các điều kiện đã cho của bài toán.*

Biện luận: *Chỉ rõ khi nào thì bài toán không có nghiệm, một nghiệm, hai nghiệm,..., vô số nghiệm.*

2.Các bước giải một bài toán quỹ tích

Phần thuận: *Chứng minh những điểm ở trên hình (H) phù hợp với điều kiện bài toán.*

Phần đảo: *Chứng minh những điểm phù hợp với điều kiện bài toán đều thuộc hình (H).*

Kết luận*: Quỹ tích cần tìm là hình (H).*

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định, đại lượng không đổi

Ví dụ 1: Cho $\widehat{xOy}$ và hai điểm A; B lần lượt nằm trên hai tia Ox; Oy thỏa mãn $OA - OB = m$ (m là độ dài cho trước). Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABO và vuông góc với AB luôn đi qua một điểm cố định.

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ, 2003 – 2004

Giải

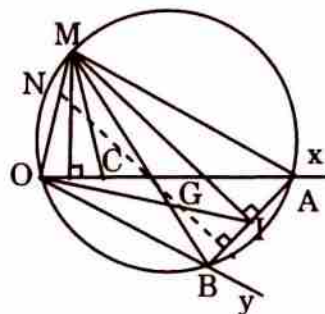
Lấy điểm C thuộc đoạn OA sao cho OC = m (C cố định).

Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔABO và trung trực của AB, cắt nhau tại M.

Đường thẳng qua trọng tâm G của ΔABO vuông góc với AB cắt OM tại N. Ta có:

$\Delta MAC = \Delta MBO$ (c.g.c) suy ra MO = MC;

$\widehat{OMB} = \widehat{OMA} \Rightarrow \widehat{OMC} = \widehat{BMA} = \widehat{AOB} = \alpha$ không đổi $\Rightarrow$ M cố định (là giao điểm của đường trung trực của OC và cung OC chứa góc α).



Gọi I là trung điểm của AB. Xét ΔOMI, N thuộc OM và G thuộc OI. Vì G là trọng tâm của ΔABO nên $\frac{OG}{OI}=\frac{2}{3}$; NG // MI (vì cùng vuông góc với AB) suy ra $\frac{OM}{ON}=\frac{OG}{OI}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ N cố định. Vậy đường thẳng qua trọng tâm G của ΔABO vuông góc với AB đi qua điểm N cố định.

Ví dụ 2: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B,C là các tiếp điểm). Gọi M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Tiếp tuyến qua cắt AB và AC tại E và F. Đường thẳng BC cắt OE và OF ở P và Q.

a. Chứng minh tứ giác PQFE nội tiếp được trong một đường tròn.

b. Chứng minh tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn (đường tròn (O) và điểm A đã cho cố định).

ĐTS 10 Quốc Học – Huế 2002 – 2003

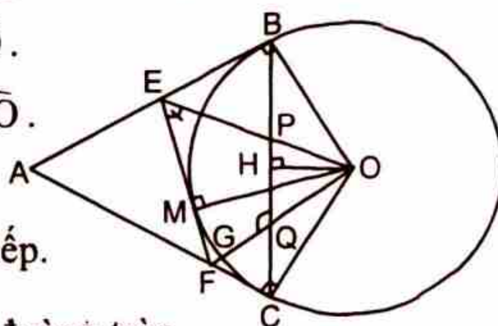
Giải

a. Tứ giác PQFE nội tiếp được trong một đường tròn.

EO cắt đường tròn (O) tại I, FO cắt đường tròn (O) tại G.

Ta có: $\widehat{EOQ}=\widehat{EOM}+\widehat{MOQ}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MC}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}=\widehat{EBQ}$

$\Rightarrow$ Tứ giác EBOQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QEO}=\widehat{QBO}$.



Chứng minh tương tự cũng có $\widehat{PFO}=\widehat{PCO}$.

Mà $\widehat{QBO}=\widehat{PCO}$ (vì OB = OC)

Do đó $\widehat{QEO}=\widehat{PFO}\Rightarrow$ tứ giác PQFE nội tiếp.

b. Tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Ta có: $\widehat{FQP}+\widehat{FEO}=180^0$ (tứ giác EPQF nội tiếp).

$\widehat{FQP}+\widehat{PQO}=180^0$ (hai góc kề bù). Suy ra $\widehat{PQO}=\widehat{FEO}$

Hai tam giác FEO và PQO có $\widehat{EOF}$ góc chung; $\widehat{PQO}=\widehat{FEO}$ (chứng minh trên). Cho nên $\Delta FEO\sim\Delta PQO\Rightarrow\frac{PQ}{EF}=\frac{OH}{OM}$.

Vì điểm A và đường tròn (O; R) cố định nên OH và OM không đổi.

Do đó tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Ví dụ 3: Cho tam giác cân ABC (AB = AC), D là một điểm trên đáy BC. Các đường tròn qua D lần lượt tiếp xúc với AB tại B, với AC tại C cắt nhau tại K. Chứng minh:

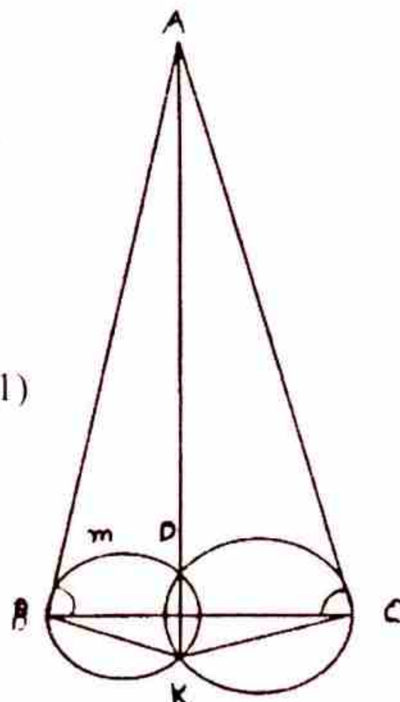
a. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC.

b. Tích AD.DK không đổi khi D chạy trên đáy BC.

ĐTS 10A Chu Văn An – Hà Nội 1991 – 1992

Giải

a. Nối KD, ta có $sđ\widehat{ABD} = \frac{1}{2}sđ\widehat{BmD} = sđ\widehat{BKD} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BKD}$.



Tương tự ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{CKD}$

Vậy: $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \widehat{BKD} + \widehat{CKD} = \widehat{BKC}$

$\Rightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^0$ (Vì $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180^0$)

Do đó tứ giác ABKC nội tiếp. Suy ra đường tròn qua ba điểm A, B, C cũng là đường tròn qua ba điểm K, B, C.

b. Theo a. Ta có: $\widehat{BKD} = \widehat{ABD}$

$\widehat{CKD} = \widehat{ACD} \Rightarrow$ KD là tia phân giác của $\widehat{BKC}$ (1)

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Tứ giác ABKC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BCA}; \widehat{CKA} = \widehat{CBA}$

Mà $\widehat{BCA} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{CKA}$

$\Rightarrow$ KA là tia phân giác của $\widehat{BKC}$ (2)

Từ (1), (2) có K, D, A thẳng hàng.

Từ $\Delta ABD \sim \Delta AKB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD.AK = AB^2$ (không đổi).

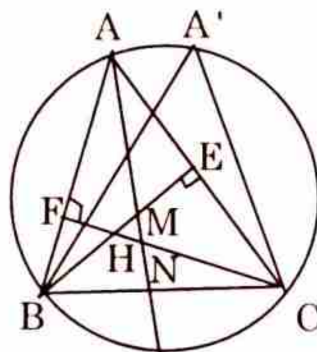
Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác. Đường phân giác trong của góc A cắt đường cao BE tại M, đường cao CF tại N.

a. Tam giác HMN là tam giác gì?

b. Khi B, C cố định, A chạy trên cung lớn BC. Chứng minh $\frac{MN}{HM}$ không đổi.

ĐTS 10A Chu Văn An – Hà Nội 1991 – 1992

Giải



$\widehat{HMN} = \widehat{BAM} + \widehat{ABM}$ ($\widehat{HMN}$ là góc ngoài của ΔMAB)

a. Gọi A' là trung điểm cung lớn BC.

$\widehat{HNM} = \widehat{NAC} + \widehat{ACN}$ ($\widehat{HNM}$ là góc ngoài của ΔNAC)

Mà $\widehat{BAM} = \widehat{NAC}$ (AM là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (cặp các góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\widehat{HMN} = \widehat{HNM} \Rightarrow \Delta HMN$ cân tại H.

b. Gọi A' là trung điểm cung lớn BC.

Ta có A'B = A'C, $\widehat{BA'C} = \widehat{BAC}$, A' cố định

Xét ΔHMN cân tại H và $\Delta A'BC$ cân tại A' có $\widehat{MHN} = \widehat{BA'C}(= \widehat{BAC})$.

Do đó $\Delta HMN \sim \Delta A'BC \Rightarrow \frac{HM}{A'B} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{HM} = \frac{BC}{A'B}$ không đổi.

Ví dụ 5: Cho đường tròn (O) bán kính R là một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

1. Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của góc BMD.
2. Chứng minh rằng A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
3. Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.
4. Chứng minh tích p = AE.AF không đổi khi M di động. Tính p theo bán kính r và $\widehat{ABC} = \alpha$.

ĐTS 10 THPT Hà Nội năm 1996 – 1997

Giải

1. Tứ giác AMCD nội tiếp đường tròn (O) $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ABC}$. Do đó $\widehat{AMD} = \widehat{AMB}$

$\Rightarrow$ MA là tia phân giác góc BMD.

2. ΔBMD có MI vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔBMD cân tại M, MI là trung trực của BD.

Do đó AD = AB; Mà $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ nên AB = AC.

Ta có AB = AC = AD do đó A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDBC

Đường tròn ngoại tiếp ΔDBC cố định vì điểm A cố định và có bán kính AB không đổi, do đó $\widehat{BDC}$ có độ lớn không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cung nhỏ AC.

3. Vẽ tia Bm là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF, tia Bm nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A.

Ta có $\widehat{mBE} = \widehat{BFE}\left(= \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{BE}\right); \widehat{ABC} = \widehat{BFE}\left(\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}\right)$.

Do đó: $\widehat{mBE} = \widehat{ABE} \Rightarrow$ Hai tia Bm và BA trùng nhau.

Do đó BA là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

4. Xét ΔABE và ΔAFB có $\widehat{BAE}$ chung, $\widehat{ABE} = \widehat{BFA}$

Do đó $\Delta ABE \sim \Delta AFB \Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AE.AF = AB^2$

Biết AB không đổi nên AB^2 không đổi.

Vậy $p = AE.AF = AB^2$ không đổi khi M di động trên cung nhỏ AC.

Vẽ đường kính AH của (O). $\widehat{ABH}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{BHA} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$). $\widehat{ABC} = \alpha = \widehat{BCA}$.

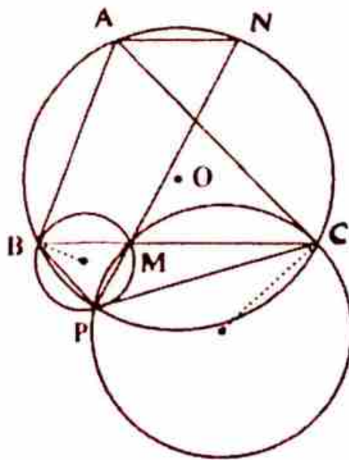
Do đó $\widehat{BHA} = \alpha$; ΔABH vuông tại B

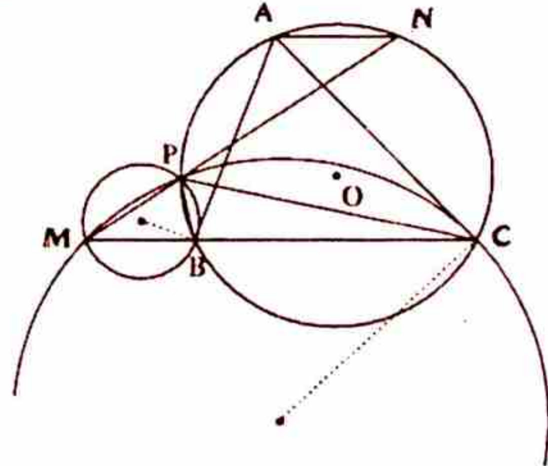
$\Rightarrow AB = AH\sin\widehat{BHA} \Rightarrow AB = 2R\sin\alpha$

$p = AB^2 = (2R)^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\alpha$.

Ví dụ 6: Cho Δ nội tiếp (O) và một điểm M bất kỳ trên đường thẳng BC ($M \neq B$ và C). Vẽ đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B; vẽ đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AC tại C, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là P.Chứng minh rằng: $P \in (O)$ và đường tròn PM luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên BC.

Giải





Ta cần chứng minh $P \in (O)$ với mọi vị trí M, xét các trường hợp:

* *Điểm M thuộc cạnh BC*: Do AB tiếp xúc với đường tròn (BPM) nên $\widehat{BPM} = \widehat{ABC}$ (vì cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$). Do AC tiếp xúc với đường tròn (CPM) nên $\widehat{CPM} = \widehat{ACB}$ (chắn $\overset{\frown}{CM}$).

Suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{BPC} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$ nên tứ giác ABPC nội tiếp đường tròn. Qua ba điểm A, B, C chỉ xác định được một đường tròn (O) nên $P \in (O)$.

* *Điểm M thuộc tia Bx* là tia đối của tia BC (hoặc M thuộc tia Cy là tia đối của tia CB). Chứng minh tương tự có $\widehat{PBA} = \widehat{PMC}$ (chắn $\overset{\frown}{PB}$) và $\widehat{PCA} = \widehat{PMC}$ (chắn $\overset{\frown}{PC}$) nên $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Hai đỉnh kề B và C của tứ giác ACBP cùng nhìn đoạn PA dưới những góc bằng nhau nên nội tiếp đường tròn. Suy ra $P \in (O)$. Gọi N là giao điểm của đường thẳng PM với (O) thì trong cả hai trường hợp ta đều có: $\widehat{ANP} = \widehat{ACP}$ (chắn $\overset{\frown}{AP}$) và $\widehat{ACP} = \widehat{NMC} \Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{NMC}$, chúng ở vị trí so le nên AN // BC. Do

ΔABC nội tiếp đường tròn (O) cho trước và AN // BC với $N \in (O)$ nên điểm N cố định. Vậy PM đi qua điểm N cố định.

Ví dụ 7: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB cố định, đường kính CD di động (hai đường thẳng AB và CD không trùng nhau). Tiếp tuyến của (O) tại B cắt các đường thẳng AC và AD lần lượt tại E và F.

a. Chứng minh $BE \,.\, BF = 4R^2$
b. Chứng minh CEFD là tứ giác nội tiếp.
c. Gọi I là trung điểm của EF và K là giao điểm của AI và CD. Chứng minh rằng khi CD di động thì K chạy trên một đường cố định.

Giải

a. Ta có: Tam giác ACD vuông tại A (nội tiếp nửa đường tròn đường kính CD), nên tam giác EAF vuông tại A.AB vuông góc với EF (vì EF là tiếp tuyến tại B). Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AEF:

$$AB^2 = BE \,.\, BF \Leftrightarrow BE \,.\, BF = 4R^2$$

b. Ta có: $\widehat{AFE} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{DB}}{2} = \dfrac{180^0 - sđ\overset{\frown}{DB}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AD}}{2}$ (góc ở đỉnh bên ngoài đường tròn). $\widehat{ACD} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AD}}{2}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AD}$)

Suy ra: $\widehat{AFE} = \widehat{ACD}$. Nên tứ giác CEFD nội tiếp.

c. Ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACD}$ (chứng minh trên)

$AI = \dfrac{1}{2}EF$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông EAF), nên tam giác AIF cân tại I. Suy ra: $\widehat{FAI} = \widehat{AFI} = \widehat{AFE}$

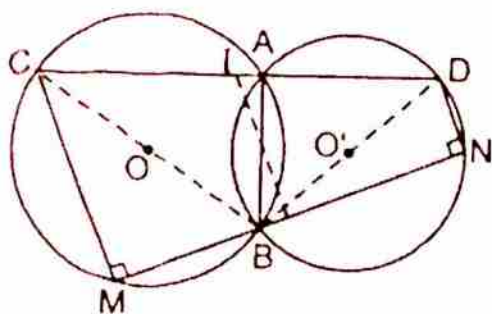
Mà $\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 90^0$. Suy ra $\widehat{ADC} + \widehat{FAI} = \widehat{ADK} + \widehat{DAK} = 90^0$

Do đó $\widehat{AKD} = \widehat{AKO} = 90^0$

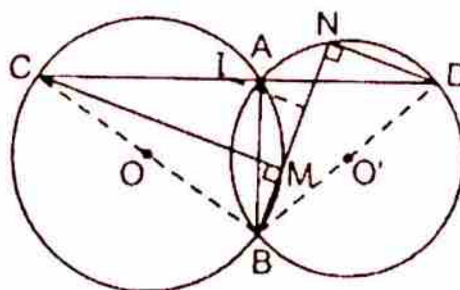
Vậy khi CD di động thì K chạy trên đường tròn đường kính AO.

Ví dụ 8: Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau Ở A và B. Các điểm M, N theo thứ tự di chuyển trên các đường tròn (O), (O') sao cho chiều từ A đến M và từ A đến N trên các đường tròn đều theo chiều quay của kim đồng hồ và các cung AM, AN có số đo bằng nhau. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



a)



b)

Kẻ các đường kính BOC; BO'D thì C, A, D thẳng hàng. CAD là cát tuyến chung cố định.

Trường hợp M thuộc cung BC không chứa A: $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$, $\widehat{ACM}$ bù $\widehat{ABN}$ nên $\widehat{ABN}$ bù $\widehat{ABM}$, do đó M, B, N thẳng hàng.

Trường hợp M thuộc cung BC chứa A $\widehat{ABN} = \widehat{ABM}$ nên M, B, N thẳng hàng.

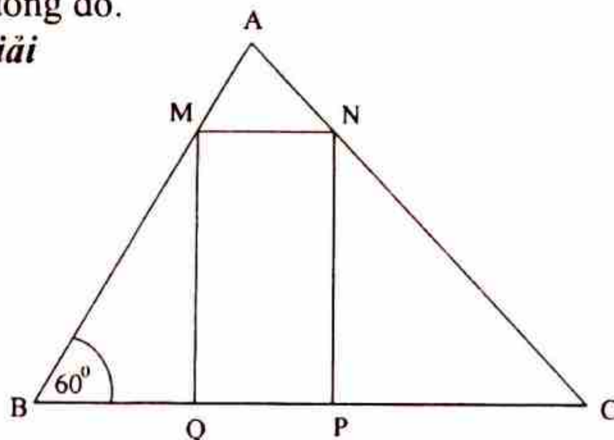
Trong cả hai trường hợp, ta có CM và DN cùng vuông góc với MN. Do đó đường trung trực của MN đi qua trung điểm I của CD, đó là điểm cố định.

Dạng 2: Các bài toán dựng hình

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^0; BC = a; AB = c$ (a, c là hai độ dài cho trước), Hình chữ nhật MNPQ có đỉnh M trên cạnh AB, N trên cạnh AC, P và Q ở trên cạnh BC được gọi là hình chữ nhật nội tiếp trong tam giác ABC.

1. Tìm vị trí của M trên cạnh AB để hình chữ nhật MNPQ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.
2. Dựng hình vuông EFGH nội tiếp trong tam giác ABC bằng thước kẻ và com-pa. Tính diện tích của hình vuông đó.

Giải



1. + Đặt AM = x ($0 \le x \le c$).

Ta có: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Leftrightarrow MN = \dfrac{ax}{c}$.

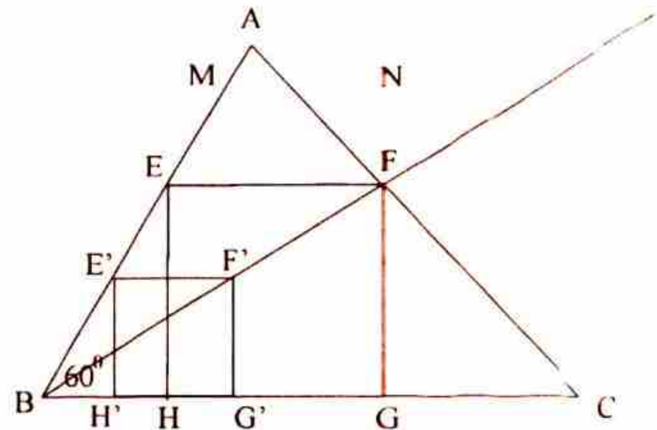
$MQ = BM.\sin 60^0 = \dfrac{(c - x)\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra diện tích của MNPQ là:

$S = \dfrac{ax(c - x)\sqrt{3}}{2c} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2c}x(c - x)$

+ Ta có bất đẳng thức $\dfrac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 (a > 0, b > 0)$

Áp dụng, ta có:



$$x(c-x) \le \left(\frac{x+c-x}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$x = c - x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}.$$

Suy ra: $S \le \frac{a\sqrt{3}}{2c} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{ac\sqrt{3}}{8}$.

Vậy: $S_{max} = \frac{ac\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \frac{c}{2}$ hay M là trung điểm của cạnh AC.

2. Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông EFGH nội tiếp trong tam giác ABC. Nối BF, trên đoạn BF lấy điểm F'.

Dựng hình chữ nhật: E'F'G'H' ($E' \in AB; G', H' \in BC$).

Ta có: E'F'//EF và F'G' // FG nên: $\frac{E'F'}{EF} = \frac{BE'}{BE} = \frac{BF'}{BF} = \frac{F'G'}{FG}$

$\Rightarrow E'F' = F'G'$, Do đó E'F'G'H' là hình vuông.

+ Cách dựng và chứng minh: trên cạnh AB lấy điểm E' tùy ý, dựng hình vuông E'F'G'H' (G', H' thuộc cạnh BC). Dựng tia BF' cắt AC tại F, dựng hình chữ nhật EFGH nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tương tự trên, ta có EF = FG, suy ra EFGH là hình vuông.

+ Ta có: $\frac{BH'}{E'H'} = \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\cot \widehat{G'BC} = \frac{BG'}{F'G'} = \frac{BH' + H'G'}{F'G'} = \frac{BH'}{E'H'} + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$$

Suy ra: tia BF' cố định khi E' di động trên AB, cắt AC tại một điểm F duy nhất. Trường hợp hình vuông E'F'G'H' có đỉnh F' ở trên cạnh AC; G' và H' ở trên cạnh BC, lý luận tương tự ta cũng có tia CE' cố định, cắt AB tại E. Vậy bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

+ Đặt AE = x. Ta có

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow EF = \frac{ax}{c}; HE = (c-x)\sin B = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2}$$

EFGH là hình vuông, nên $EF = EH \Leftrightarrow \frac{ax}{c} = \frac{(c-x)\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{c^3\sqrt{3}}{2a + c\sqrt{3}}$

Suy ra diện tích hình vuông EFGH là: $S = EF^2 = \frac{3a^2c^2}{(2a + c\sqrt{3})^2}$

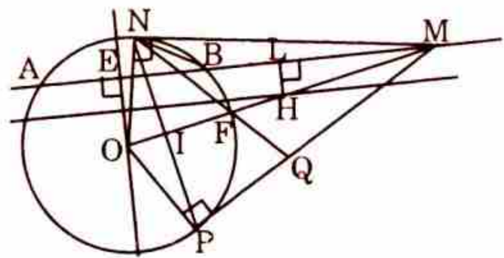
Ví dụ 2: Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn (O) tại hai điểm A và B. Từ một điểm M tùy ý trên đường thẳng d và ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MN và MP với đường tròn (O) (M, N là hai tiếp điểm).

1. Chứng minh rằng $MN^2 = MP^2 = MA.MB$.
2. Dựng vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho tứ giác MNOP là hình vuông.
3. Chứng minh rằng tâm của đường tròn nội tiếp và tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP lần lượt chạy trên hai đường cố định khi M di động trên đường thẳng d.

Giải

1. Ta có: MN = MP (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau)
Chứng minh được 2 tam giác MAN và MNB đồng dạng.
Suy ra $\frac{MA}{MN} = \frac{MN}{MB} \Leftrightarrow MN^2 = MP^2 = MA.MB$.

2. Để MNOP là hình vuông thì đường chéo $OM = ON\sqrt{2} = R\sqrt{2}$
Dựng điểm M: ta dựng hình vuông OACD, dựng đường tròn tâm O đi qua điểm D, cắt (d) tại M. Chứng minh: Từ M vẽ 2 tiếp tuyến MN và MP. Ta có $MN = \sqrt{MO^2 - ON^2} = R$, nên tam giác ONM vuông cân tại N. Tương tự, tam giác OPM cũng vuông cân tại P.



Do đó MNOP là hình vuông. Bài toán luôn có hai nghiệm hình vì $OM = R\sqrt{2} > R$.

3. + Ta có: MN và MP là 2 tiếp tuyến của (O), nên MNOP là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OM. Tâm là trung điểm H của OM. Suy ra tam giác cân MPQ nội tiếp trong đường tròn đường kính OM, tâm là H.
+ Kẻ $OE \perp AB$, thì E là trung điểm của AB (cố định). Kẻ $HL \perp$ (d) thì HL // OE, nên HL là đường trung bình của tam giác OEM, suy ra: $HL = \frac{1}{2}OE$ (không đổi).
+ Do đó, khi M di động trên (d) thì H luôn cách đều (d) một đoạn không đổi, nên H chạy trên đường thẳng (d') // (d) và (d') đi qua trung điểm của đoạn OE.
+ Ta có: OM là phân giác trong $\widehat{NMP}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Kẻ tia phân giác trong $\widehat{PNM}$ cắt đường tròn (O) tại điểm F, khi đó $\overset{\frown}{NF} = \overset{\frown}{FP}$ (ứng với góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nhau). Suy ra F ở trên OM, do đó F là tâm đường tròn nội tiếp tam

giác MNP. Vậy khi M di động trên (d) thì tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP chạy trên đường tròn (O).

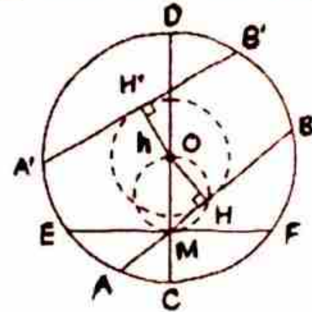
Ví dụ 3: Cho đường tròn tâm O bán kính 15cm, điểm M cách O là 9cm.

a. Dựng dây AB đi qua M và có độ dài 26cm.

b. Có bao nhiêu dây đi qua M và có độ dài là một số nguyên xentimét?

Giải

a. *Phân tích:* Giả sử đã dựng được dây AB đi qua M và AB = 26cm. Kẻ OH ⊥ AB, độ dài OH = h. Xác định (h là khoảng cách từ O đến dây A'B bất kì dài 26cm)



Điểm H thoả mãn hai điều kiện:

- Nằm trên đường tròn có đường kính OM ;
- Nằm trên đường tròn (O; h).

Cách dựng. Bạn đọc tự giải.

Chứng minh- Bạn đọc tự giải.

Biện luận. Bài toán có hai nghiệm hình.

b. Dây ngắn nhất đi qua M là dây EF có khoảng cách từ tâm đến dây lớn nhất bằng 9cm, dây này có độ dài $2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24$cm. Dây dài nhất đi qua M là đường kính CD có độ dài 30cm.

Ứng với mỗi độ dài 25, 26, 27, 28, 29cm, có hai dây đi qua M. Do đó có 2 + 5.2 = 12 (dây) đi qua M và có độ dài là một số nguyên xentimét.

Ví dụ 4: Cho đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Trên cạnh AB hãy xác định điểm M để cho $\widehat{ADM} = \widehat{BCM}$.

Giải

Giả sử tìm được điểm M trên cạnh AB để $\widehat{ADM} = \widehat{BCM} = \alpha$.

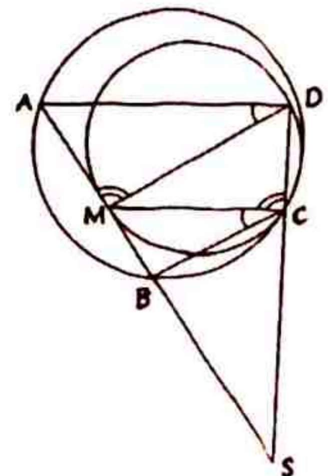
Tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^0$ hay $\widehat{A} + \widehat{DCM} + \alpha = 180^0$ (1)

Trong ΔAMD ta có: $\widehat{A} + \widehat{AMD} + \alpha = 180^0$ (2)

So sánh (1) và (2) suy ra $\widehat{AMD} + \alpha = \widehat{DCM} + \alpha = \widehat{AMD} = \widehat{DCM}$.

Vậy M là tiếp điểm của đường tròn đi qua hai điểm D và C và tiếp xúc với cạnh AB. Dễ dàng chứng minh ΔSBD ~ ΔSCA (S là giao điểm của các đường thẳng AB và DC (S chung, $\widehat{BAC} = \widehat{BDS}$)

$\Rightarrow \frac{SB}{SC} = \frac{SD}{SA} \Rightarrow SB.SA = SC.SD$ (1)



ΔSMC ~ ΔSDM ($\widehat{S}$ chung, $\widehat{SDM} = \widehat{CMS}$) suy ra

$\frac{SM}{SD} = \frac{SC}{SM} \Rightarrow SM^2 = SC.SD.(2) \Rightarrow SM^2 = SB.SA$

$\Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SB}{SM} \Rightarrow \frac{SM - SA}{SA} = \frac{SB - SM}{SM}$

$\Rightarrow \frac{MA}{SA} = \frac{MB}{SB} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{SA}{SB}$

Điểm M chia đoạn thẳng AB thành hai đoạn thẳng và $\frac{MA}{MB}=\frac{SA}{SB}$ người ta gọi điểm M là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{SA}{SB}$.

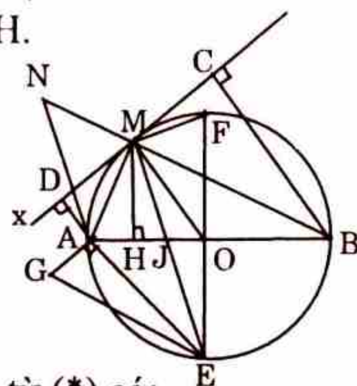
Ví dụ 5: Cho đường tròn tâm (O) đường kính AB. Từ một điểm M trên đường tròn (M khác A, B) ta vẽ tiếp tuyến xy với (O). Kẻ $AD \perp xy$ và $BC \perp xy$.

1. Chứng minh MC = MD. Từ đó suy ra AD + BC có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của M.
2. Tính tỉ số diện tích tam giác AMB và diện tích tứ giác ABCD.
3. Giả thiết tia phân giác góc AMB cắt AB tại I và đi qua E của đường kính EF ($EF \perp AB$). Chứng minh $\frac{1}{MI} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}\right)$. Nêu cách dựng tam giác AMB biết MI = m, AB = a.

Thi học sinh giỏi lớp 9 –TP Vinh, Nghệ An -2008

Giải

1. Chứng minh được OM là đường trung bình của hình thang vuông ABCD, nên MD = MC. Theo tính chất độ dài đường trung bình của hình thang suy ra được: AD + BC = 2OM = AB (không đổi).
2. + Kẻ $MH \perp AB$, chứng minh được: MC = MD = MH.
   + Chứng minh được: $S_{ADM} = S_{AHM}; S_{MHB} = S_{MCB}$
   suy ra: $\frac{S_{MAB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$



3. a. Chứng minh: kẻ AN // IM cắt BM kéo dài tại N.

Khi đó $\frac{MI}{NA}=\frac{BM}{BN} \Rightarrow MI = \frac{NA.BM}{BN}$ (*)

Trong tam giác AMN có AN < MA + MN = 2.MA, từ (*) có:

$MI < \frac{2.MA.MB}{MA+MB} \Rightarrow \frac{1}{MI} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}\right)$. đpcm.

b. ***Phân tích:*** - Giả sử ΔMAB dựng được. Ta có AB = a, MI = m và đặt EI = x. Khi đó ME = m + x. Vì $\Delta EOI \sim \Delta EMF$, nên

$$x(x+m) = \frac{a}{2}.a \Leftrightarrow x^2 + mx = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4}+\frac{a^2}{2}$$

+ Như thế $x+\frac{m}{2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông mà hai cạnh góc vuông bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\frac{m}{2}$. Suy ra cách dựng sau:

Cách dựng: - Dựng ΔEAG vuông ở A có $AG = \frac{m}{2}$

- Trên GE dựng điểm K sao cho $GK = \frac{m}{2}$, ta được đoạn EK = x.

- Dựng đường tròn tâm E bán kính EK cắt AB tại I.

- Nối EI cắt đường tròn (O) tại M. ΔMAB là tam giác phải dựng.

Chứng minh và biện luận: Học sinh tự giải

Dạng 3: Các bài toán quỹ tích

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. P là một điểm cố định nằm giữa B và O. Một góc vuông MPN quay xung quanh đỉnh P (M, N thuộc đường tròn (O; R)). Gọi I là trung điểm của MN.

a. Chứng minh: $R^2 = IO^2 + IP^2$.

b. Tìm quỹ tích của điểm I. (thí sinh không phải làm phần đảo).

Thi học sinh giỏi lớp 9 –TPVinh,Nghệ An -2009

Giải

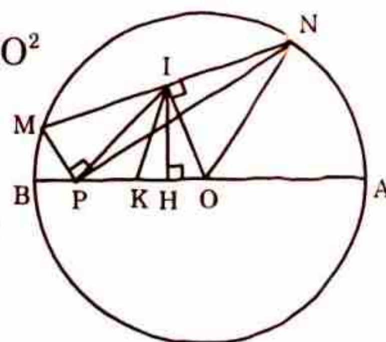
a. ΔMON có $\hat{P} = 90^0$; I là trung điểm của MN $\Rightarrow PI = \frac{MN}{2} = IN$.

$IO \perp MN \Rightarrow IO^2 + IN^2 = NO^2$. Vậy $IO^2 + IP^2 = ON^2 = R^2$ (đpcm .

b. Gọi K là trung điểm của PO; kẻ $IH \perp PO$, ta có: $PI^2 = IH^2 + HP^2$ (1) và $IO^2 = IH^2 + HO^2$ (2). Từ (1) và (2) ta được:

$PI^2 + IO^2 = 2IH^2 + PH^2 + HO^2 = 2KI^2 + PK^2 + KO^2$

$\Leftrightarrow R^2 = 2KI^2 + \frac{PO^2}{2}$.



Tức là: $R^2 = 2KI^2 + \frac{PO^2}{2} \Rightarrow KI^2 = \frac{1}{4}\left(2R^2 - PO^2\right)$

$\Leftrightarrow KI = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - PO^2}$ (không đổi)

mà K cố định nên I thuộc đường tròn tâm K bán kính $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - PO^2}$

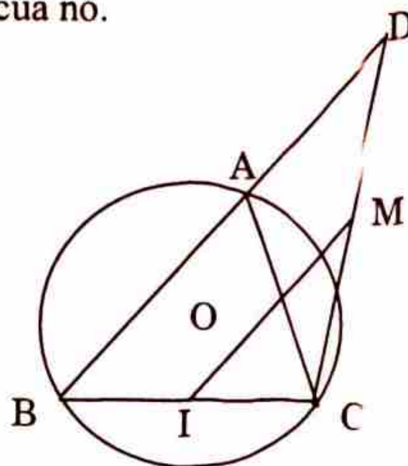
Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm O, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho AD = AC. Gọi M là trung điểm của CD. Hỏi M di chuyển trên đường nào? Nêu cách dựng đường này và giới hạn của nó.

Giải

Ta có: tam giác ACD cân tại A (gt) nên $\widehat{BAC} = 2\widehat{ADC}$ ($\widehat{BAC}$ là góc ngoài của tam giác ACD).Gọi I là trung điểm của BC, ta có MI // BD (đường trung bình của tam giác BCD), nên:

$\widehat{IMC} = \widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{4}\widehat{DOC} = \frac{\alpha}{4}$

($\alpha = \widehat{BOC}$ không đổi)



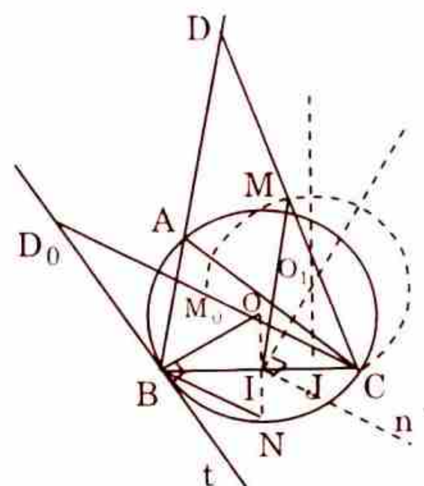
+ Do đó: M chạy trên cung tròn nhìn đoạn IC dưới góc $\frac{\alpha}{4}$ không đổi.

+ Dựng tia OI cắt đường tròn (O) tại N, ta có:

$\widehat{NBC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{IMC}$.

+ Dựng tia In'//BN, dựng đường thẳng qua I và vuông góc với In' cắt trung trực đoạn IC tại O_1. Đường tròn tâm O_1 và đi qua C là đường cần dựng.

+ Khi A chạy trên cung lớn BC tới trùng với A thì D trùng với D_0 trên tiếp tuyến Bt của (O) và $BD_0 = BC$, khi đó M trùng với M_0 là trung điểm của CD_0.



+ Vậy M chỉ di chuyển trên cung lớn CM_0 của đường tròn (O_3).

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định. C là một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn. Ở phía ngoài tam giác ABC vẽ các hình vuông BCDE và ACFG. Gọi Ax, By là các tiếp tuyến của nửa đường tròn.

a. Chứng minh rằng khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho thì đường thẳng ED luôn đi qua một điểm cố định và đường thẳng FG luôn đi qua điểm cố định khác.

b. Tìm quĩ tích các điểm E và G khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho.

c. Tìm quĩ tích các điểm D và F khi C di chuyển trên nửa đường tròn đã cho.

Giải

a. Gọi K là giao điểm của Ax và GF, I là giao điểm của By và ED. Ta có: $\widehat{BEI} = \widehat{BCA} = 90^0$; $\widehat{EBI} = \widehat{CBA}$ (góc có các cạnh tương ứng vuông góc) $BE = EC$. Do đó: $\Delta BEI = \Delta BCA \Rightarrow BI = BA$ mà By cố định, suy ra điểm I cố định. Tương tự, K cố định

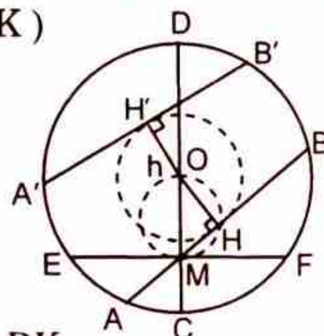
+ Vậy khi C di chuyển trên đường tròn thì đường thẳng ED đi qua điểm I cố định và đường thẳng GF đi qua điểm K cố định

b. Suy ra quĩ tích của I là nửa đường tròn đường kính BI (bên phải By, $C \equiv A \Rightarrow E \equiv I, C \equiv B \Rightarrow E \equiv B$; quĩ tích của K là nửa đường tròn đường kính AK (bên trái Ax, $C \equiv A \Rightarrow G \equiv A, C \equiv B \Rightarrow G \equiv K$)

c. Xét hai tam giác BEI và BDK, ta có:

$\frac{BE}{BD} = \frac{BI}{BK} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\widehat{EBI} + \widehat{IBD} = \widehat{KBD} + \widehat{IBD} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{KBD}$.



Do đó: $\Delta BEI = \Delta BDK \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{BEI} = 90^0$

+ Vậy, quĩ tích của D là nửa đường tròn đường kính BK.

+ Tương tự, quĩ tích của F là nửa đường tròn đường kính?

Ví dụ 4: Từ hai đầu đoạn thẳng AB, dựng các đường vuông góc Ax và By với đoạn thẳng đó và lấy AC và BD sao cho: $AC.BD = \frac{AB^2}{4}$.

a. Chứng minh rằng nếu O là trung điểm của AB thì: $CD^2 = OC^2 + OD^2$

b. Chứng minh rằng tam giác ODC đồng dạng với các tam giác AOC và BDO.

c. Tìm quỹ tích hình chiếu I của điểm O trên CD khi C và D chuyển động trên Ax và By.

Giải

a. $\frac{AB^2}{4} = OA^2$. Do đó hệ thức đầu bài viết:

$AC.BD = OA^2 \Rightarrow \frac{AC}{OA} = \frac{OA}{BD}$ hay $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{BD}$ dẫn đến hai tam giác vuông AOC và BDC đồng dạng, do đó: $\widehat{O}_1 = \widehat{C}_1; \widehat{O}_2 = \widehat{D}_2 = \widehat{D}_1$

Suy ra: $\widehat{O}_3 = 180^0 - (\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2) = 180^0 - (\widehat{O}_1 + \widehat{D}_1) = 90^0$

Tam giác COD vuông, theo Py-ta-go $CD^2 = OC^2 + OD^2$

b. $\Delta AOC \sim \Delta BDO$ nên: $\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{BD}$ hay $\frac{OC}{OD} = \frac{OB}{BD}$

Suy ra hai tam giác vuông BDO và ODC đồng dạng. Vậy tam giác ODC đồng dạng với các tam giác AOC và BDO.

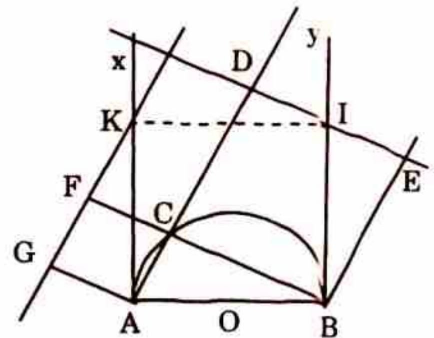
c. Từ chứng minh trên, ta suy ra: $\widehat{D}_2 = \widehat{O}_2$, rồi $\widehat{COI} = \widehat{D}_2 = \widehat{O}_2$ nên $\Delta COI = \Delta COA$ (cạnh huyền chung và một góc nhọn bằng nhau), suy ra: IO = OA = OB. Vậy I thuộc nửa đường tròn đường kính AB.

Đảo lại:

Nếu I là một điểm bất kì trên nửa đường tròn. Từ I kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax tại C và By tại D. Ta có: IC = AC, ID = DB;

$IO^2 = IC.ID$ hay $IO^2 = AC.DB$

Hay $\frac{AB^2}{4} = AC.DB$



Vậy: Quỹ tích điểm I là nửa đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 5: Cho đường tròn tâm O bán kính R. Kẻ một dây BC sao cho góc $\widehat{BOC} = 90^0$. Từ B và C kẻ các tiếp tuyến với đường tròn cắt nhau tại M.

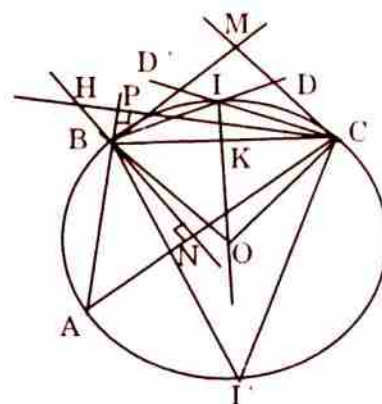
a. Chứng minh rằng trong tam giác MBC các đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại trung điểm I của cung nhỏ BC, và chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MBC là: $r = \frac{R}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

b. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của góc B và C cắt nhau tại trung điểm I' của cung lớn BC, và chứng minh rằng: $I'K = \frac{R}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)$ (K là giao điểm của IOI' với BC).

c. Gọi A là một điểm bất kì trên cung lớn BC. Chứng minh rằng góc BAC không đổi và đường phân giác của góc đó luôn luôn đi qua một điểm cố định.

d. Đường cao BN và CP của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tìm giá trị của góc BHC.

Giải



a. Gọi I là giao điểm của phân giác trong BD với cung nhỏ BC.

Ta có: $\widehat{DBM} = \widehat{DBC}$ hay sđ $\overset{\frown}{BI} =$ sđ $\overset{\frown}{IC}$.

Suy ra I là trung điểm của cung BC.Chứng minh tương tự dùng CD' qua I; I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MBC bán kính là

$IK = IO - OK = R - \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

b. Đường phân giác ngoài của góc B thì vuông góc với BI, do đó phải đi qua I' là điểm đầu của đường kính IOI' suy ra I' là trung điểm của cung lớn BC. Cũng tương tự như vậy đối với phân giác ngoài của góc C.

Ta có: $I'K = I'O + OK' = R + \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R}{2}\left(2 + \sqrt{2}\right)$

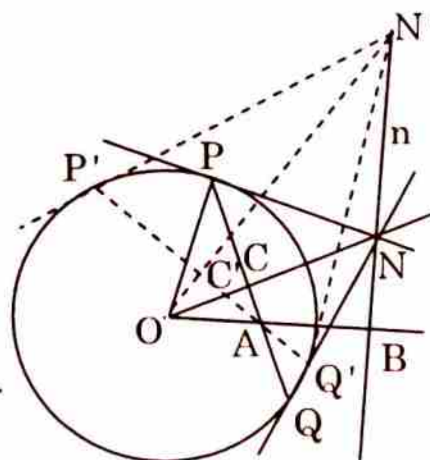
c. Ta có: $\widehat{BAC} =$ sđ $\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^0$

Đường phân giác của góc này luôn đi qua điểm cố định I là trung điểm của cung nhỏ BC.

d. Góc $\widehat{BHC}$ và góc $\widehat{BAC}$ có các cạnh vuông góc với nhau từng đôi một nên $\widehat{BHC} = \widehat{BAC} = 45^0$.

Ví dụ 6: Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định nằm trong đường tròn và không trùng với tâm O. Qua A vẽ một dây tùy ý. Tìm tập hợp giao điểm N của các tiếp tuyến với đường tròn mà hai tiếp điểm là hai đầu của dây đó.

Giải



Thuận: Giả sử dây cung PQ đi qua A. Hai tiếp tuyến qua P và Q cắt nhau tại N, ON cắt PQ tại C. Từ N kẻ đường thẳng n vuông góc với OA, cắt đường thẳng OA tại B.

Xét hai tam giác vuông AOC và NOB ($ON \perp PQ$ vì NP và NQ là hai tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

Chúng có $\widehat{AOC}$ chung, vậy $\Delta AOC \sim \Delta NOB$.

$\Rightarrow \dfrac{OA}{ON} = \dfrac{OC}{OB} \Rightarrow OB = \dfrac{ON.OC}{OA}$.

Trong ΔOPN ($OP \perp PN$ bán kính vuông góc với tiếp tuyến tại tiếp điểm), ta có: $PO^2 = OC.ON$.

Do đó $OB = \frac{OP^2}{OA} = \frac{R^2}{OA}$(1). OA cố định, R không đổi nên OB không đổi, điểm B nằm trên tia OA nên điểm B cố định. Vậy điểm N nằm trên đường thẳng n vuông góc với tia OA tại B.

Đảo: Lấy một điểm N' bất kì trên đường thẳng n. Từ N' kẻ tiếp tuyến N'P', N'Q' với đường tròn (O; R) (P' và Q'là tiếp điểm).

Ta phải chứng minh P'Q' đi qua A.Thật vậy, giả sử P'Q' cắt ON' tại C' và tia OA tại A'. Chứng minh tương tự như phần thuận ta có: $OB = \frac{R^2}{OA'}$ (2). So sánh (1) và (2) suy ra $\frac{R^2}{OA'} = \frac{R^2}{OA} \Rightarrow OA' = OA$.

Vậy trên tia OB, A' trùng với A, hay P'A' đi qua A.

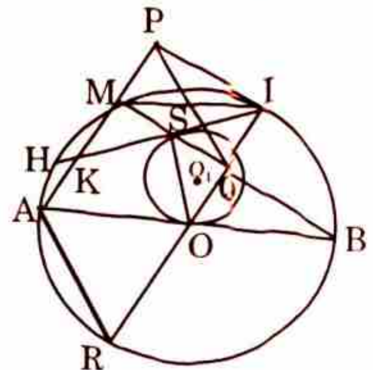
Kết luận: Tập hợp (hay quỹ tích) giao điểm n là đường thẳng n vuông góc với tia OA tại B mà $OB = \frac{R^2}{OA}$.

Ví dụ 7: Một điểm M nằm trên một nửa đường tròn có đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia MA lấy một điểm H sao cho MH = MB

a. Chứng minh rằng góc MHB có độ lớn không đổi. Tìm tập hợp điểm H.
b. Xác định điểm M sao cho chu vi tam giác MAB bằng 2,25 AB.
c. Gọi trung điểm của BH là K. Chứng minh rằng đường thẳng KM luôn luôn đi qua một điểm cố định.
d. Gọi I là điểm đối xứng với H qua M. Tìm tập hợp điểm I.

Giải

a. Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (nội tiếp chắn đường kính), nên $\widehat{HMB} = 90^0$; mà MH = MB nên ΔMBH vuông cân và $\widehat{AHB} = 45^0$. Do A, B cố định nên H nằm trên cung chứa góc 45^0. Vẽ trên đoạn AB và nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa M (gọi là cung (α)). Dựng đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt (α) tại H_1, ta có $\widehat{AH_1B} = 45^0; \widehat{BAH_1} = 90^0$, do đó ΔAH_1B vuông cân, $H_1B = AB\sqrt{2}$. Vì $\widehat{H_1AB} = 90^0$ nên H_1B là đường kính của cung (α).



Đảo lại lấy một điểm H' trên cung H_1B, nối H'A cắt cung AB tại M' được $\Delta M'H'B$ vuông cân (vì $\widehat{H'M'B} = 180^0 - \widehat{AM'B} = 90^0; \widehat{AH'B} = 45^0$), do đó M'H' = M'B' và H' thuộc tập hợp điểm H. Nếu lấy H' trên phần còn lại của cung (α) thì H'A không cắt cung AB và H' không thuộc tập hợp điểm H. Vậy tập hợp điểm H là cung H_1B.

b. Ta có: AH = AM + MH = AM + MB = 2,25AB – AB = 1,25AB. Vậy H nằm trên đường tròn (A; 1,25AB). Đường tròn này cắt cung H_1B tại hai điểm H_2, H_3 (vì 1,25 AB < $AB\sqrt{2}$ = đường kính cung H_1B). Nối H_2, H_3 với A cắt cung AB tương ứng tại M_2, M_3 ta được hai điểm cần tìm.

c. Xét giao điểm P của MK với cung AB. Vì ΔMHB cân đỉnh M nên MK vừa là trung tuyến (Do KB = KH) và là phân giác, do đó $\widehat{KMB} = 45^0$. Ta có sđ$\widehat{PB} = 2\widehat{KMB} = 90^0$. Vậy P là trung điểm của cung AB và do đó cố định (P chính là tâm của cung (α) vì $PH_1 = PB = PA$).

d. Vì I đối xứng với H qua M nên $\widehat{MIB} = \widehat{MHB} = 45^0$ và ΔMIB vuông cân. Do đó $R_B^{90^0}$ (N) (theo hình trên) biến H thành I. Ảnh của H_1 là điểm I_1 đối xứng với H_1 qua A. Vì H_1B là đường kính của cung (α) nên I_1B là đường kính của cung chứa I. Vậy tập hợp điểm I là nửa đường tròn đường kính I_1B có chứa điểm A.

Ví dụ 8: Một điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm (O), đường kính AB. Gọi các trung điểm của các cung AM, MB lần lượt là H, I và giao điểm của các dây AM, HI là K.

a. Chứng minh rằng góc HKM có độ lớn không đổi.

b. Vẽ đường cao IP của tam giác IAM. Chứng minh rằng đường thẳng IP tiếp xúc với đường tròn $\left(O;\dfrac{AB}{2}\right)$.

c. Gọi Q là trung điểm của dây MB, dựng hình bình hành APQR. Tìm tập hợp điểm R.

d. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm M, hãy dựng một đường tròn có đường kính bằng $\dfrac{AB}{3}$ sao cho nó không có điểm chung với đường thẳng HI với mọi vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đã cho.

Giải

a. Vì $\widehat{AH} = \widehat{HM}; \widehat{IM} = \widehat{IB}$

nên $\widehat{AKH} = \dfrac{1}{2}$sđ$\left(\widehat{AH} + \widehat{MI}\right) = \dfrac{1}{2}$sđ$\left(\widehat{AM} + \widehat{MB}\right) = \dfrac{1}{4}180^0 = 45^0$.

Vậy $\widehat{HKM} = 180^0 - \widehat{AKH} = 135^0$ (không đổi).

b. Nối OI cắt MB tại Q, ta có $OQ \perp MB$ (vì $\widehat{IM} = \widehat{IA}$ và O là tâm đường tròn). Mặt khác, $\widehat{PMB} = 180^0 - \widehat{AMB} = 90^0$ (vì $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn). Ta có hình chữ nhật PIQM (do $\hat{P} = \widehat{M} = \hat{Q} = 90^0$). Vậy $\widehat{PIO} = 90^0$. Mà I là điểm đầu của bán kính OI, nên PI tiếp xúc với (O).

c. Ta có: $\widehat{MIR} = \widehat{MPQ}$ (vì ΔMPQ = ΔQIM (c.g.c)).

Mà $\widehat{MPQ} + \widehat{PAR} = 180^0$ (vì PQ // AR).

Vậy $\widehat{MIR} + \widehat{PAR} = 180^0$ và MARI nội tiếp được, do đó nằm trên đường tròn đi qua A, M, I tức là đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$. Vì QR // PA, mà $PA \perp MB$ nên $QR \perp MB$, hơn nữa, QM = QB nên QR thuộc đường kính. Đảo lại, lấy R' trên nửa còn lại của đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$, nối đường kính R'OI'; kẻ dây $BM' \perp OI'$ tại Q', ta có AM' // R'I' (vì cùng $\perp$ BM') và $\widehat{M'I'} = \widehat{I'B}$. Hạ $I'P' \perp AM'$. Dựng hình bình hành $AP'Q'R_1$ áp dụng chứng minh ở phần thuận cho hình bình hành này, được $I'R_1$ là đường kính; R' trùng với R_1 và thuộc tập hợp điểm R. Vậy tập hợp điểm R là nửa đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$ (phần không chứa điểm M).

d. Ta có: $sđ\widehat{HI} = sđ\left(\widehat{HM} + \widehat{MI}\right) = \frac{1}{2}sđ\left(\widehat{AM} + \widehat{MB}\right) = 90^0$. Do đó $\widehat{HCI} = 90^0$ (góc ở tâm chắn cung 90^0, ΔOHI vuông cân. Hạ $OS \perp HI$ tại S, ta có ΔSOI, vuông cân nên $OS = SI = \frac{OI\sqrt{2}}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{4}$, và đường tròn $\left(O; \frac{AB\sqrt{2}}{4}\right)$ luôn luôn tiếp xúc với HI tại S. Dựng $OO_1 \perp AB$ sao cho $OO_1 = \frac{AH}{6}$ rồi dựng đường tròn $\left(O; \frac{AB}{6}\right)$. Chỉ cần $\left(O_1; \frac{BA}{6}\right)$ nằm trong $\left(O; \frac{AB\sqrt{2}}{4}\right)$ là đủ để HI $\left(O; \frac{AB}{6}\right)$ không có điểm chung. Quả vậy $\frac{AB\sqrt{2}}{4} - \frac{AB}{6} = \frac{(3\sqrt{2}-2)AB}{12} > \frac{(3,14-2)AB}{12} > \frac{2AB}{12} = \frac{AB}{6} = OO_1$ và $\left(O_1; \frac{BA}{6}\right)$ chính là một đường tròn cần dựng.

Ví dụ 9: Cho tam giác cân BCD nội tiếp đường tròn (O; R) biết BC = BD = a, $\widehat{D} = 30^0$. Một điểm M di động trên cạnh CD và đường thẳng BM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N.

a. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và R.
b. Chứng minh rằng BM. BN không đổi và tính giá trị không đổi này
c. Gọi D' là điểm đối xứng với D qua BM. Tìm tập hợp các điểm D' khi M di chuyển trên CD.

Giải

a. $\widehat{D} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BC} = 60^0$.

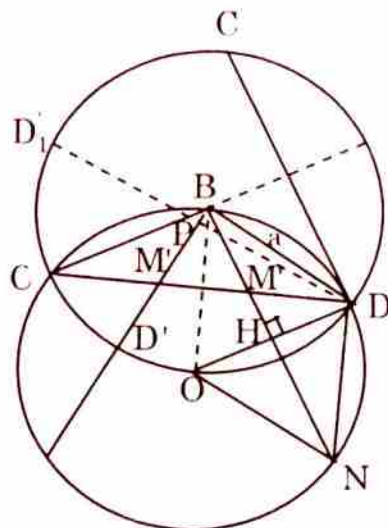
Vậy BC là cạnh lục giác đều nội tiếp đường tròn (O; R). Do đó BC = R mà BC = a $\Rightarrow$ a = R.

b. $\Delta BMD \sim \Delta BDN$

$(\hat{N} = \frac{1}{2} sd\overset{\frown}{BD} = \hat{C} = \overset{\frown}{BCD}; \hat{B}$ chung)

$\frac{MB}{BD} = \frac{DB}{BN} \Rightarrow BM.BN = BD^2$;

$BM.BN = a^2$ (không đổi).



c. Do đối xứng, ND = ND', và $\widehat{D'ND} = 2\widehat{BND} = sd\overset{\frown}{BD} = 60^0$. Suy ra $\Delta DD'N$ đều (Δcân có góc 60^0).

Vậy $R_D^{60^0}(T): N \to D'$. Dễ dàng thấy rằng $O \to B$. Vì N chạy trên cung lớn DC bằng 240^0 nên D' chạy trên cung DCD_1 bằng 240^0 trên đường tròn (B; R). Cung đó chính là tập hợp điểm D'.

Dạng 4: Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 1: Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A}$ =1v). AC > AB. Một điểm P di động trên BC. Kẻ nửa đường thẳng vuông góc với BC tại P cắt cạnh AC tại M, cắt đường thẳng chứa cạnh AB tại E và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại N.

a. Chứng minh $PN^2 = PC.PB = PM.PE$

b. Tìm vị trí của P để tích PM.PE đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Giải

a. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào ΔBNC, thì $PN^2 = PB.PC$ (1). Hai tam giác vuông PMC và PBE có $\hat{C} = \hat{E}$ (hai góc có các cạnh tương ứng vuông góc), suy ra $\Delta PMC \sim \Delta PCE$

$\Rightarrow \frac{PM}{PB} = \frac{PC}{PE} \Rightarrow PB.PC = PM.PE$ (2)

So sánh (1) và (2) suy ra $PN^2 = PB.PC = PM.PE$

b. PM.PE đạt giá trị lớn nhất khi PB.PC đạt giá trị lớn nhất mà PB + PC = BC không đổi, nên max PB.PC xảy ra khi PB = PC. Vậy P là trung điểm cạnh BC; min PB.PC xảy ra và bằng 0 khi P trùng với B hoặc C.

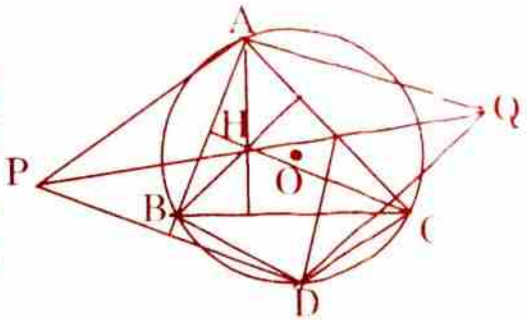
Ví dụ 2: Cho tam giác có các góc nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. H là trực tâm của tam giác. D là một điểm trên cung BC không chứa điểm A.

a. Xác định vị trí của điểm D để tứ giác BHCD là hình bình hành.

b. Gọi P và Q lần lượt là các điểm đối xứng của điểm D qua các đường thẳng AB và AC. Chứng minh rằng 3 điểm P, H, Q thẳng hàng.

c. Tìm vị trí của điểm D để PQ có độ dài lớn nhất.

Giải



a. Giả sử đã tìm được điểm D trên cung BC sao cho tứ giác BHCD là hình bình hành. Khi đó: BD // HC; CD // HB. Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $CH \perp AB$ và $BH \perp AC \Rightarrow BD \perp AB$ và $CD \perp AC$.

Do đó: $\widehat{ABD} = 90^0$ và $\widehat{ACD} = 90^0$. Vậy AD là đường kính của đường tròn tâm O. Ngược lại nếu D là đầu đường kính AD của đường tròn tâm O thì tứ giác BHCD là hình bình hành.

b. Vì P đối xứng với D qua AB nên $\widehat{APB} = \widehat{ADB}$ nhưng $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$

Do đó: $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$. Mặt khác: $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{APB} + \widehat{AHB} = 180^0$.

Tứ giác APBH nội tiếp được đường tròn nên $\widehat{PAB} = \widehat{PHB}$.

Mà $\widehat{PAB} = \widehat{DAB}$ do đó $\widehat{HAB} = \widehat{DAB}$. Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{CHQ} = \widehat{DAC}$

Vậy $\widehat{PHQ} = \widehat{PHB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHQ} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$

Suy ra ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

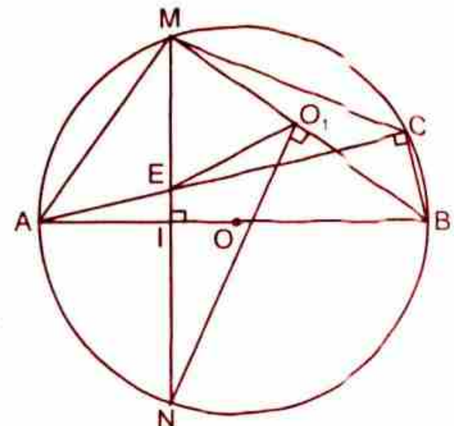
c. Ta thấy tam giác APQ là tam giác cân đỉnh A.

Có $AP = AQ = AD$ và $\widehat{PAQ} = 2\,\widehat{BAC}$ không đổi nên cạnh đáy PQ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ AP và AQ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AD là lớn nhất $\Leftrightarrow$ D là đầu đường kính kẻ từ A của đường tròn tâm O.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định. Điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1. Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.
2. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
3. Chứng minh $AM^2 = AE.AC$.
4. Chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$.
5. Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Giải



1. Theo giả thiết $MN \perp AB$ tại I $\Rightarrow \widehat{EIB} = 90^0$; ΔACB nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^0$ hay $\widehat{ECB} = 90^0$.

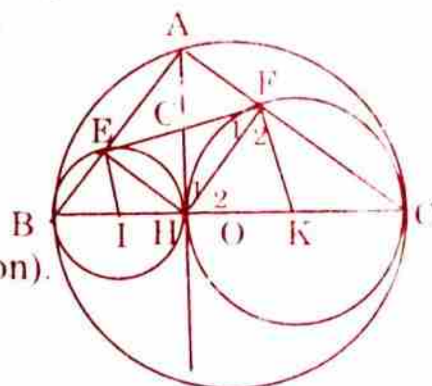
$\Rightarrow \widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết MN ⊥ AB ⇒ A là trung điểm của cung MN
   ⇒ $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $\widehat{AME} = \widehat{ACM}$. Lại thấy CAM là góc chung của hai tam giác AME và AMC do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
3. Theo trên $\Delta AME \sim \Delta ACM \Rightarrow AM^2 = AE.AC$.
4. $\widehat{AMB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn); MN ⊥ AB tại I ⇒ ΔAMB vuông tại M có MI là đường cao ⇒ $MI^2 = AI.BI$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông).
   Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác AIM vuông tại I ta có
   $AI^2 = AM^2 - MI^2 \Rightarrow AI^2 = AE.AC - AI.BI$.
5. Theo trên $\widehat{AMN} = \widehat{ACM}$ ⇒ AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECM; Nối MB ta có $\widehat{AMB} = 90^0$, do đó tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp ΔECM phải nằm trên BM. Ta thấy NO_1 nhỏ nhất khi NO_1 là khoảng cách từ N đến BM ⇒ $NO_1 \perp BM$.
   Gọi O_1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔECM có bán kính là O_1M. Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn tâm O_1 bán kính O_1M với đường tròn (O) trong đó O_1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

Ví dụ 4: Cho đường tròn (O) đường kính BC. Dây AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

1. Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).
2. Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?
3. Chứng minh AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
5. Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.

Giải



1. (HD) OI = OB − IB ⇒ (I) tiếp xúc (O)
   OK = OC − KC ⇒ (K) tiếp xúc (O)
   IK = IH + KH ⇒ (I) tiếp xúc (K)
2. Ta có: $\widehat{BEH} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   ⇒ $\widehat{AEH} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)
   $\widehat{CFH} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   ⇒ $\widehat{AFH} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (2)
   $\widehat{BAC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn hay $\widehat{EAF} = 90^0$ (3)
   Từ (1), (2), (3) ⇒ tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông).

3. Theo giả thiết $AD \perp BC$ tại H nên ΔHAB vuông tại H có $HE \perp AB$ ($\widehat{BEH} = 90^0$) $\Rightarrow AH^2 = AE.AB$ (*). Tam giác AHC vuông tại H có $HF \perp AC$ (theo trên $\widehat{CFH} = 90^0$) $\Rightarrow AH^2 = AF.AC$ (**)

   Từ (*) và (**) $\Rightarrow AE.AB = AF.AC\left(= AH^2\right)$.

4. Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật, gọi G là giao điểm của hai đường chéo AH và EF ta có GF = GH (tính chất đường chéo hình chữ nhật) $\Rightarrow \Delta GFH$ cân tại G $\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{H}_1$.

   ΔKFH cân tại K (vì có KF và KH cùng là bán kính)

   $\Rightarrow \widehat{F}_2 = \widehat{H}_2 \Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$

   mà $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = \widehat{AHC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 = \widehat{KFE} = 90^0 \Rightarrow KF \perp EF$

   Chứng minh tương tự ta cũng có $IE \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

Bài tập vận dụng

1. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B.

a. Nêu cách dựng cát tuyến chung CAD, $C \in (O)$, $D \in (O')$, sao cho A là trung điểm của CD.

b. Tính độ dài CD nêu ở câu a biết rằng OO' = 5cm. OA = 4cm, O'A = 3cm.

2. Cho góc vuông xOy. Các điểm A và B theo thứ tự di chuyển trên các tia Ox và Oy sao cho OA + OB = k (k là hằng số).

Vẽ các đường tròn (A; OB) và (B; OA).

a. Chứng minh rằng hai đường tròn (A) và (B) luôn cắt nhau.

b. Gọi M, N là các giao điểm của hai đường tròn (A) và (B). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho đường tròn (O). đường kính AB = 2R. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

a. Chứng minh khi MN di động, trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.

b. Từ A kẻ $Ax \perp MN$. tia BI cắt Ax tại C. Chứng minh tứ giác CMBN là hình bình hành.

c. Chứng minh C là trực tâm của tam giác AMN.

d. Khi MN quay quanh H thì C di động trên đường nào.

e. Cho $AM.AN = 3R^2, AN = R\sqrt{3}.$. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác AMN.

4. Cho đường tròn (O;R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.

b. Chứng minh rằng năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

c. Chứng minh $OI.OM = R^2; OI.IM = IA^2$.

d. Chứng minh OAHB là hình thoi.

e. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

f. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

5. Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc và AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh:

a. Tứ giác OMNP nội tiếp.

b. Tứ giác CMPO là hình bình hành.

c. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

d. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA. Vẽ đường tròn tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

a. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.

b. Chứng minh IP // OQ.

c. Chứng minh rằng AP = PQ.

d. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

7. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE. Đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

a. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp.

b. Tính góc CHK.

c. Chứng minh KC. KD = KH.KB.

d. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?

8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm di động trên nửa đường tròn đó và At là tia tiếp tuyến của (O) ở trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa (O). Vẽ đường tròn tâm A, bán kính bằng BC cắt tia AC tại D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn tâm A vừa vẽ cắt At tại E.

a. Tính độ dài đoạn AE theo R.

b. Tìm quỹ tích điểm D.

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). I là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O_2) đi qua I và tiếp xúc với AC tại C. Gọi K là giao điểm thứ hai của các đường tròn (O_1), (O_2).

a. Chứng minh rằng ba điểm B, K, C thẳng hàng.

b. Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho BD = CE. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.

10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C cố định trên đường kính ấy (C không trùng O). Điểm M chuyển động trên đường tròn. Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khác A

11. Cho góc vuông xAy, điểm B cố định trên Ay, điểm C di chuyển trên Ax. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

12. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB, điểm C thuộc bán kính OA. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn ở D. Đường tròn tâm I tiếp xúc với nửa đường tròn và tiếp xúc với các đoạn thẳng CA, CD. Gọi E là tiếp điểm trên AC của đường tròn (I).

a. Chứng minh rằng BD = BE.

b. Suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

13. Qua điểm M thuộc cạnh đáy BC của tam giác cân ABC, kẻ các đường thẳng song song với các cạnh bên, chúng cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E. Gọi I là điểm đối xứng với M qua DE. Chứng minh rằng:

a. Điểm I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC;

b. Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng IM đi qua một điểm cố định

14. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ấy. Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB. E là điểm đối xứng với M qua BC. Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O) thì DE luôn đi qua một điểm cố định.

15. Cho đường tròn tâm C đường kính BC, A là một điểm thuộc đường tròn H là hình chiếu của A trên BC. Vẽ đường tròn (I) có đường kính AH cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N.

a. Chứng minh rằng OA vuông góc với MN.

b. Vẽ đường kính AOK của đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của HK. Chứng minh rằng E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC.

c. Cho BC cố định. Xác định vị trí của điểm A để bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC lớn nhất.

Hướng dẫn và đáp số

1. a. Gọi I là trung điểm của OO', kẻ CD vuông góc với IA tại A. Kẻ OH, O'K vuông góc với CD. Dễ chứng minh AH = AK nên AC = AD.

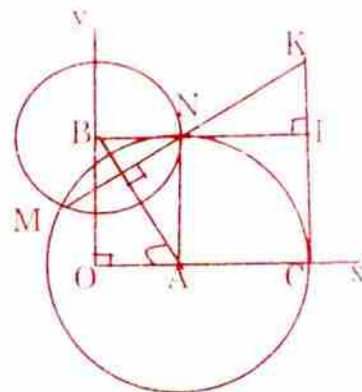
b. Ta có $\widehat{OAO'} = 90^0$, $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (cùng bằng $\widehat{A_1}$).

$\Delta HOA \sim \Delta AOO'$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{O'A} = \dfrac{AO}{O'O} \Rightarrow \dfrac{AH}{3} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow AH = 2.4cm \Rightarrow CD = 9.6cm.$

2. a. Hai đường tròn (A) và (B) cắt nhau vì $|OA - OB| < AB < OA + OB$

b. Gọi C là giao điểm của đường tròn (A) và tia Ox.



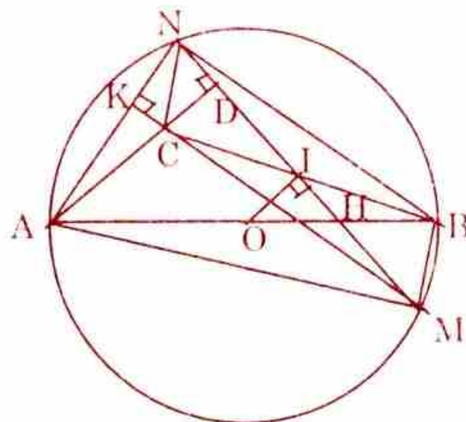
Ta có:

$OC = OA + AC = OA + OB = k$

$\Rightarrow$ C cố định.

Kẻ đường vuông góc với AC tại C, cắt MN ở K. Hãy chứng minh rằng CK = k để suy ra K là điểm cố định (chú ý $\widehat{NKC}$ và $\widehat{BAO}$ cùng bù với $\widehat{BAC}$).

3. a. I là trung điểm của MN $\Rightarrow OI \perp MN$ tại I (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{OIH} = 90^0$.



OH cố định nên khi MN di động thì I cũng di động nhưng luôn nhìn OH cố định dưới một góc 90^0) do đó I di động trên đường tròn đường kính OH. Vậy khi MN di động, trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.

b. Theo giả thiết $Ax \perp MN$; theo trên $OI \perp MN$ tại I $\Rightarrow$ OI // Ax hay OI // AC mà O là trung điểm của AB

$\Rightarrow$ I là trung điểm của BC. lại có I là trung điểm của MN (gt) $\Rightarrow$ CMBN là hình bình hành (Vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

c. CMBN là hình bình hành $\Rightarrow$ MC // BN mà $BN \perp AN$ (vì $\widehat{ANB} = 90^0$ do là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MC \perp AN$; theo trên $AC \perp MN$ $\Rightarrow$ C là trực tâm của tam giác AMN.

d. Ta có H là trung điểm của OB; I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ IH là đường trung bình của $\Delta OBC \Rightarrow$ IH // OC

Theo giả thiết $Ax \perp MN$ hay $IH \perp Ax \Rightarrow OC \perp Ax$ tại C

$\Rightarrow \widehat{OCA} = 90^0$ $\Rightarrow$ C thuộc đường tròn đường kính OA cố định. Vậy khi MN quay quanh H thì C di động trên đường tròn đường kính OA cố định.

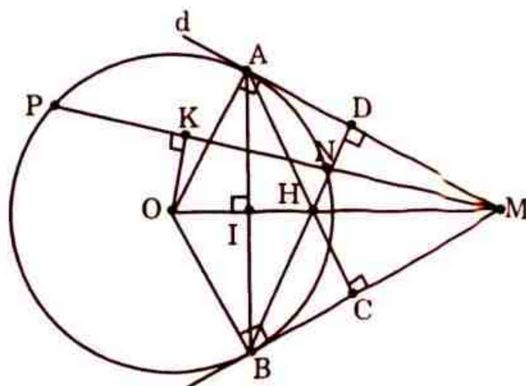
e. Ta có $AM.AN = 3R^2, AN = R\sqrt{3} \Rightarrow AM = AN = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A. (l). Xét ΔABN vuông tại N ta có $AB = 2R$; $AN = R\sqrt{3} \Rightarrow BN = R$ $\Rightarrow \widehat{ABN} = 60^0$.

$\widehat{ABN} = \widehat{AMN}$ (nội tiếp cùng chắn cung AN) $\Rightarrow \widehat{AMN} = 60$ (2).

Từ (l) và (2) $\Rightarrow \Delta AMN$ là tam giác đều $\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S = S_{(0)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4}$

4. a. (HS tự làm).

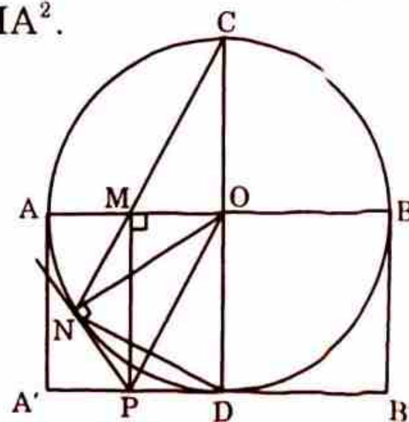


b. Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{OKM} = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAM} = 90^0; \widehat{OBM} = 90^0$. Như vậy K, A, B, cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M B cùng nằm trên một đường tròn.

c. Ta có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R.
$\Rightarrow$ OM là trung trực của AB $\Rightarrow OM \perp AB$ tại I.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAM} = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI.IM = IA^2$.



d. Ta có $OB \perp MB$ (tính chất tiếp tuyến); $AC \perp MB$ (gt) $\Rightarrow$ OB // AC hay OB // AH.; $OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến); $BD \perp MA$ (gt) $\Rightarrow$ OA // BD hay OA // BH $\Rightarrow$ tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (= R) $\Rightarrow$ OAHB là hình thoi.

e. Theo trên OAHB là hình thoi
$\Rightarrow OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB$
$\Rightarrow$ O, H, Mthẳng hàng (vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

f. (HD) theo trên OAHB là hình thoi $\Rightarrow$ AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R.

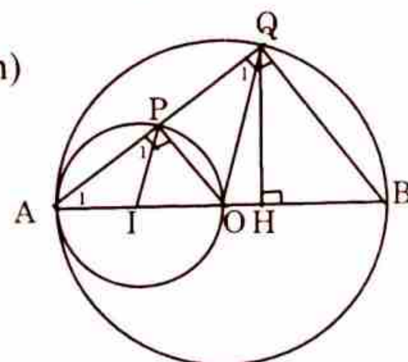
5.a. Ta có $\widehat{OMP} = 90^0$ (Vì $PM \perp AB$); $\widehat{ONP} = 90^0$ (Vì NP là tiếp tuyến). Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng $90^0 \Rightarrow$ M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP $\Rightarrow$ Tứ giác OMNP nội tiếp.

b. Tứ giác OMNP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OPM} = \widehat{ONM}$ (nội tiếp chắn cung OM)
Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R
$\Rightarrow \widehat{ONC} = \widehat{OCN} \Rightarrow \widehat{OPM} = \widehat{OCM}$.
Xét hai tam giác OMC và MOP ta có $\widehat{MOC} = \widehat{OMP} = 90^0$; $\widehat{OPM} = \widehat{OCM}$
$\Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{POM}$ lại có MO là cạnh chung
$\Rightarrow \Delta OMC = \Delta MOP \Rightarrow OC = MP$. (1)
Theo giả thiết Ta có $CD \perp AB$; $PM \perp AB \Rightarrow$ CO // PM (2).
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác CMPO là hình bình hành.

c. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có $\widehat{MOC} = 90^0$ (vì $CD \perp AB$); $\widehat{DNC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{DNC} = 90^0$ lại có $\widehat{C}$ là góc chung $\Rightarrow \Delta OMC = \Delta NDC \Rightarrow \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CO}{CN} \Rightarrow CM.\ CN = CO.CD$
mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = 2R không đổi $\Rightarrow CM.CN = 2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

d. Dễ thấy $\Delta OMC = \Delta DPO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ODP} = 90^0 \Rightarrow$ P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.
Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên đoạn thẳng A` B` song song và bằng AB.

6.a. Ta có OI = OA – IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đường tròn (O) và đường tròn (I). Vậy đường tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A.

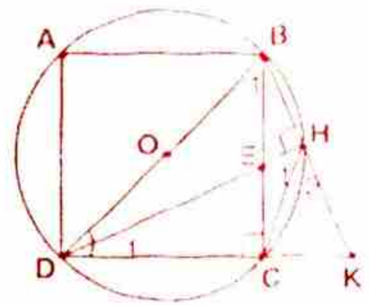


b. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính)
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{Q}_1$
ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính)
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{P}_1$
$\Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{Q}_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.

c. $\widehat{APO} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow OP \perp AQ \Rightarrow$ OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến $\Rightarrow AP = PQ$.

d. (HD) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $S_{AQB} = \dfrac{1}{2}.AB.QH$ mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB. Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.
Thật vậy P là trung điểm của cung AO $\Rightarrow PI \perp AO$ mà theo trên PI//QO $\Rightarrow QO \perp AB$ tại O $\Rightarrow$ Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung và O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất. $H \equiv O$

7.a. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\widehat{BCD} = 90^0$; $BH \perp DE$ tại H nên $\widehat{BHD} = 90^0 \Rightarrow$ như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD $\Rightarrow$ BHCD là tứ giác nội tiếp.



b. BHCD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BDC} + \widehat{BHC} = 180^0$ (1)

$\widehat{BHK}$ là góc bẹt nên $\widehat{KHC} + \widehat{BHC} = 180^0$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CHK} = \widehat{BDC}$ mà $\widehat{BDC} = 45^0$ (vì ABCD là hình vuông) $\Rightarrow \widehat{CHK} = 45^0$.

c. Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\widehat{CHK} = \widehat{BDC} = 45^0$; $\widehat{K}$ là góc chung

$\Rightarrow \Delta KHC \sim \Delta KDB \Rightarrow \dfrac{KC}{KB} = \dfrac{KH}{KD} \Rightarrow KC.KD = KH.KB$.

d. (HD) Ta luôn có $\widehat{BHD} = 90^0$ và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC ($E \equiv B$ thì $H \equiv B$; $E \equiv C$ thì $H \equiv C$).

8.a. Ta có: $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp nửa đường tròn)

$\widehat{EDA} = 90^0$ (DE là tiếp tuyến của đường tròn (A))

Xét hai tam giác vuông ABC và EAD có: $AD = BC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{EAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Nên $\Delta ABC = \Delta EAD$. Suy ra $AE = AB = 2R$. Do đó E cố định.

b. Khi C di động trên nửa đường tròn (O), điểm D luôn nhìn đoạn AE cố định dưới một góc vuông, nên D nằm trên nửa đường tròn đường kính AE. Đảo lại, lấy điểm D′ bất kì trên nửa đường tròn đường kính AE, ta có $\widehat{EDA} = 90^0$, vẽ tia AD′ cắt (O) tại C′. Hai tam giác vuông ABC′ và EAD′ có cặp cạnh huyền $AE = AB$ và $\widehat{ABC'} = \widehat{EAD'}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC). Nên chúng bằng nhau, suy ra $AD = BC$. Do đó DE là tiếp tuyến của đường tròn tâm A và bán kính bằng BC.

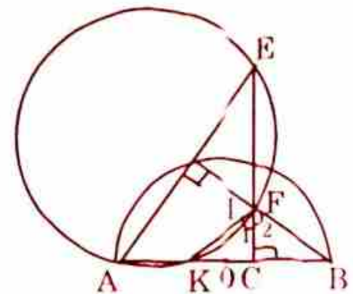
Vậy quỹ tích của D là nửa đường tròn đường kính AE. (Khi C trùng với B, thì D trùng với A; Khi C trung với A thì D trùng với E)

9.a. $\widehat{ABI} + \widehat{ACI} = 180^0 \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_2 = 180^0 \Rightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 180^0$ $\Rightarrow$ B, K, C thẳng hàng.

b. $\Delta IBD = \Delta ICE$ (c.g.c) nên $\widehat{IDB} = \widehat{IEC}$.

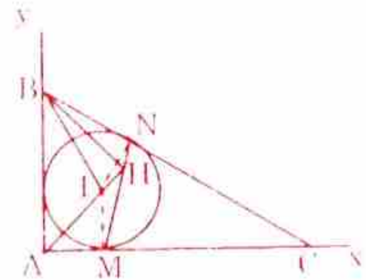
Tứ giác ADIE là tứ giác nội tiếp. Điểm cố định là I.

10. Gọi K là giao điểm của đường tròn đi qua A, E, F với AB. Ta sẽ chứng minh K là điểm cố định: Ta có $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (cùng bằng $\widehat{A}$), do đó K đối xứng với B qua C.



11. Gọi H là giao điểm của MN với tia AI cố định, ta được điểm H. Ta có $\widehat{BNH} = \widehat{BIA}$ (cùng bằng $90^0 - \frac{\hat{C}}{2}$). Suy ra BIHN là tứ giác nội tiếp.

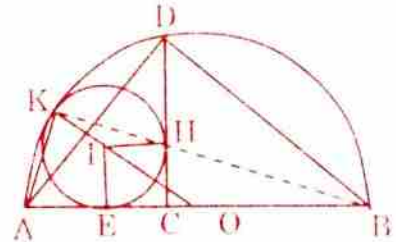
Chứng minh: BHAI để suy ra H là điểm cố định.



12. a. ΔABD vuông nên $BD^2 = BC.BA$ (1)

Gọi K là tiếp điểm của (I) và (O). Kẻ $IH \perp CD$, các tam giác cân IKH và OKB có đỉnh bằng nhau nên $\widehat{IKH} = \widehat{OKB}$ do đó K, H, B thẳng hàng.

BE là tiếp tuyến, BHK là cát tuyến của đường tròn (I) nên $BE^2 = BH.BK$. Nhưng $BH.BK = BC.BA$ (do AKHC là tứ giác nội tiếp) nên $BE^2 = BC.BA$. (2). Từ (1) và (2) suy ra $BD = BE$.



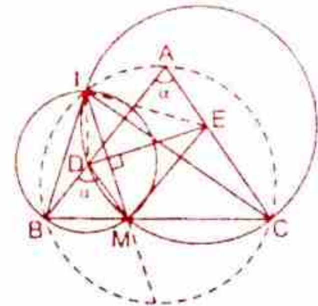
b. Suy ra từ câu a.

13. a. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$, ta có $BD = DM = DI$ nên $I \in (D; DB)$, do đó góc nội tiếp

$\widehat{BIM} = \frac{1}{2}\widehat{BDM} = \frac{\alpha}{2}$.

Chứng minh tương tự, $\widehat{MIC} = \frac{1}{2}\widehat{MEC} = \frac{\alpha}{2}$.

Do đó $\widehat{BIC} = \alpha$. Ta lại có $\widehat{BAC} = \alpha$, suy ra I, A, B, C thuộc cùng một đường tròn.

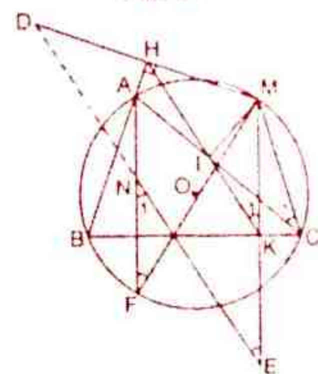


b. $\widehat{BIM} = \widehat{MIC}$ nên IM đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

14. Gọi N là trực tâm của ΔABC, AN cắt (O) ở F. Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC, BC. Ta có, ba điểm H, I, K thẳng hàng.

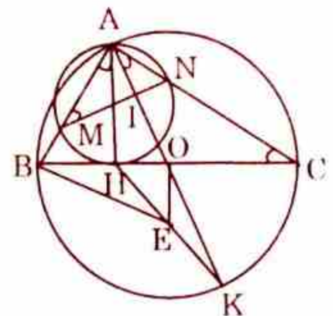
Lần lượt chứng minh: $\hat{K}_1 = \hat{C}_1 = \hat{F} = \hat{N}_1 = \hat{E}$

Để suy ra NE // HK. Tương tự ND // HK. Vậy DE luôn đi qua trực tâm N của ΔABC.



15. a. $\widehat{AMN} = \hat{A}_1 = \hat{C} = \hat{A}_2$. Ta lại có $\widehat{AMN} + \widehat{ANM} = 90^0$ nên $\hat{A}_2 + \widehat{ANM} = 90^0$. Vậy $OA \perp MN$.

b. Dễ thấy BMNC là tứ giác nội tiếp. EI là đường trung bình của ΔKHA nên EI // KA. Ta lại có $OA \perp MN$ (câu a) nên EI⊥MN. Ta có EI là đường trung trực của MN, EO là đường trung trực của BC nên E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC.



c. Lần lượt chứng minh: EB lớn nhất ⇔ EO lớn nhất ⇔ AH lớn nhất ⇔ H trùng O. Khi đó BNMC.

5. Các bài toán hình học không gian

Một số kiến thức cơ bản

Hình lăng trụ

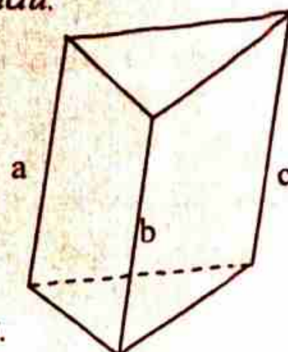
Định nghĩa : *Hình lăng trụ là hình đa diện có 2 mặt song song gọi là đáy, và các cạnh không thuộc 2 đáy song song với nhau.*

Tính chất *: Trong hình lăng trụ:*

- Các cạnh bên song song và bằng nhau

- Các mặt bên, mặt chéo là hình bình hành.

- Hai đáy có cạnh song song và bằng nhau.



**Lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy*

**Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Lăng trụ đều có các mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau.*

**Lăng trụ xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy.*

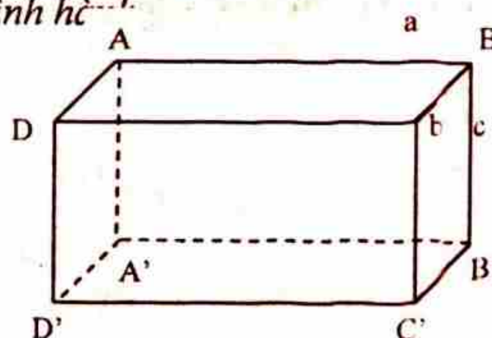
Hình hộp: *là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.*

- Hình hộp có các mặt đối diện là hình bình hành song song và bằng nhau.

- Các đường chéo hình hộp cắt nhau tại trung điểm.

- Hình hộp đứng có cạnh bên vuông góc với đáy.

- Hình hộp xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy.



- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Hình hộp chữ nhật có các mặt là hình chữ nhật.

- Ba độ dài các cạnh xuất phát từ đỉnh gọi là kích thước của hình hộp chữ nhật a, b, c.

Các đường chéo hình hộp chữ nhật bằng nhau và có độ dài: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Hình lập phương là hình hộp có 6 mặt là hình vuông.

Các cạnh của hình lập phương bằng nhau số đo a.

Các đường chéo hình lập phương có độ dài: $d=a\sqrt{3}$

Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần

$$S_{xq}=pl$$

p là chu vi thiết diện thẳng, l là độ dài cạnh bên đường sinh

Lăng trụ đứng: $S_{xq}=ph$

p là chu vi đáy,h là chiều cao

- Hình hộp chữ nhật: $S_{tp}=2(ab+bc+ca)$

a, b, c là kích thước của hình hộp chữ nhật.

- ***Thể tích của hình hộp chữ nhật:*** $V = abc$; *a, b, c là kích thước*

Thể tích hình lập phương: $V = a^3$; *a là cạnh*

Thể tích lăng trụ: $V = B.h$

B là diện tích đáy; h là chiều cao

Hình chóp

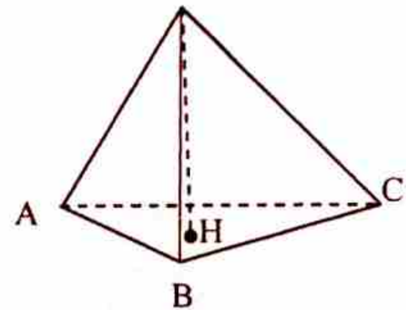
Định nghĩa

Hình chóp là hình đa diện có 1 mặt là đa giác, các mặt khác là tam giác có chung đỉnh.

Chiều cao h là khoảng cách từ đỉnh tới đáy.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Đỉnh của hình chóp đều có hình chiếu là tâm của đáy. Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện hình tứ diện.



Hình tứ diện là hình chóp tam giác có đáy là mặt nào cũng được, đỉnh là điểm nào cũng được.

Hình tứ diện đều là tứ diện có các cạnh bằng nhau.

Diện tích xung quanh của hình chóp đều:

$S_{xq} = \frac{1}{2}nad$ *n: số cạnh đáy; a: độ dài cạnh đáy; d: độ dài trung đoạn*

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + B$ *;B là diện tích đáy*

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$

Hình chóp cụt

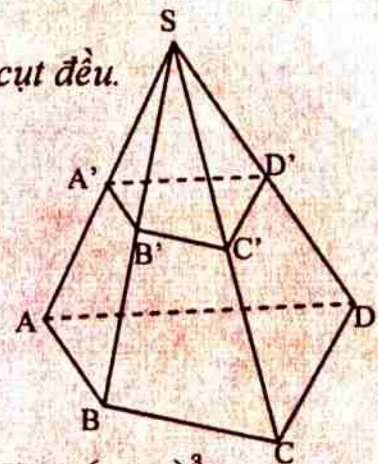
Hình chóp cụt là phần hình chóp nằm giữa đáy và thiết diện song song với đáy.

Hình chóp cụt từ hình chóp đều gọi là hình chóp cụt đều.

$S_{tp} = S_{xq} + B + B'$

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều:

$S_{xq} = \frac{1}{2}(na + na').d$



n: số cạnh đáy; a, a': cạnh đáy; d: độ dài trung đoạn, chiều cao của mặt bên. $V = V_1 + V_2$

V: thể tích hình chóp .

V_1*: thể tích chóp cụt* V_2*: thể tích hình chóp trên* $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{SH}{SH'}\right)^3$

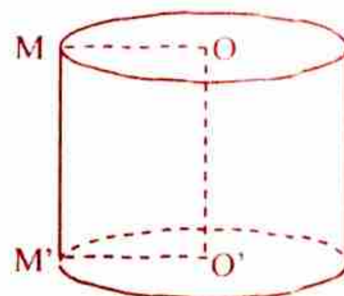
$V = \frac{1}{3}h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$; *B,B' là diện tích đáy ; h là chiều cao*

Hình trụ *Hình trụ là hình sinh ra bởi hình chữ nhật O'OMM' quay xung quanh cạnh OO'. Cạnh OM sinh ra hình tròn đáy.*

Cạnh MM' sinh ra mặt nón tròn xoay

MM' gọi là đường sinh OO' là trục của hình trụ.

h = OO' là chiều cao; R = OM bán kính đáy



Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$

R: bán kính đáy; h: chiều cao

$V = \pi R^2 h$

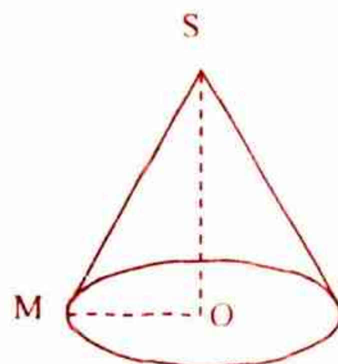
R: bán kính đáy; h: chiều cao

Hình nón *là hình sinh ra bởi tam giác vuông OMS quay xung quanh cạnh góc vuông OS. Cạnh OM sinh ra hình tròn đáy.*

Cạnh SM sinh ra mặt nón tròn xoay.

SM gọi là đường sinh SO là trục, đường cao.

R = OM bán kính đáy; h = SO chiều cao



Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$

R: bán kính đáy; l: độ dài đường sinh

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

Thể tích hình nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$ *;R: bán kính đáy; h: chiều cao*

Hình nón cụt *là phần hình nón giữa đáy và một thiết diện vuông góc với trục.*

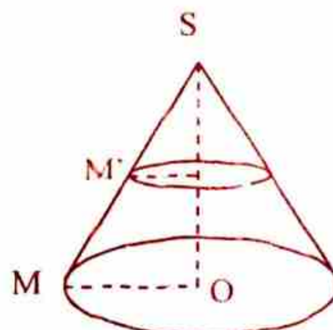
Hình nón cụt sinh bởi một hình thang vuông OMM'O' quay quanh OO'

h = OO' chiều cao; MM' = l là đường sinh

Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R + R')l$

R, R' là bán kính đáy; l là đường sinh

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi(R + R')l + \pi R^2 + \pi R'^2$



Thể tích hình nón cụt: $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(R^2 + R'^2 + RR'\right)h$

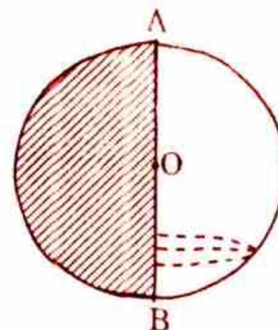
R, R' là bán kính đáy; h: chiều cao

Hình cầu: *Hình cầu tâm O, bán kính R là tập hợp những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện* $OM \le R$

Mặt cầu tâm O bán kính R là tập hợp những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện OM = R

Thiết diện qua tâm là hình tròn lớn tâm O bán kính R. Thiết diện của hình cầu với một mặt phẳng là hình tròn có tâm H là hình chiếu của O trên mặt phẳng và bán kính: $r_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$, *R là bán kính hình cầu*

d là khoảng cách từ tâm tới mặt phẳng. d = OH



Diện tích hình cầu $S = 4\pi R^2$

Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Các ví dụ minh họa

Dạng 1: Hình lăng trụ

Ví dụ 1: Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O' là tâm của A'B'C'D' và thể tích của khối O'.ABCD bằng $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. Tính thể tích của khối lập phương ABCD.A'B'C'D'.

Giải

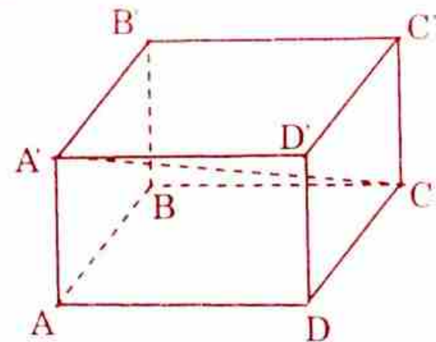
$V_{O'.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.O'O = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.AA'$ (vì OO' = AA')

$= \frac{1}{3}.V_{\text{Khối lập phương}}$

Vậy $V_{\text{Khối lập phương}} = 3.V_{O'.ABCD} = 3.\frac{2a^3\sqrt{2}}{3} = 2a^3\sqrt{2}$ (đvtt).

Ví dụ 2: Khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AA' = a\sqrt{2}$, AB = a và A'C = 3a. Tính thể tích khối hộp.

Giải



$V = AA'.S_{ABCD} = AA'.AB.AD$.

Ta có: $A'C^2 = AB^2 + AD^2 + A'A^2$

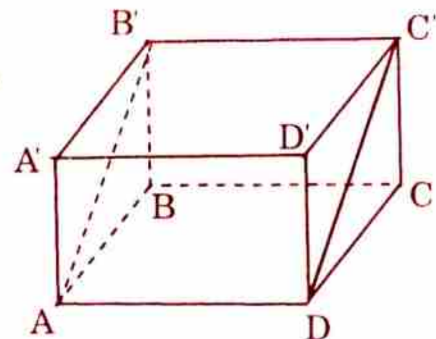
$\Leftrightarrow 9a^2 = a^2 + AD^2 + 2a^2$

$\Rightarrow AD = a\sqrt{6}$

Vậy $V = a\sqrt{2}.a.a\sqrt{6} = 2a^3\sqrt{3}$ (dvtt).

Ví dụ 3: Khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, diện tích của ABCD và ABC'D' lần lượt là $2a^2$ và $a^2\sqrt{5}$. Tính thể tích của khối hộp chữ nhật.

Giải



$V_{\text{Khối hộp chữ nhật}} = AB.AD.AA'$

• $S_{ABCD} = AB.AD = a.AD = 2a^2 \Leftrightarrow AD = 2a$

• $S_{ABC'D'} = AB.AD' = a.AD'$

$= a^2\sqrt{5} \Leftrightarrow AD' = a\sqrt{5}$.

Ta có:

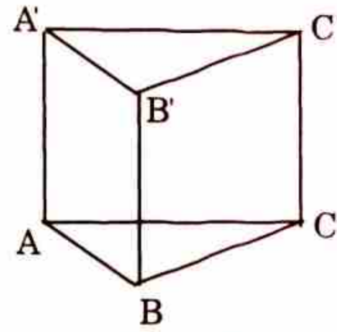
$AA' = \sqrt{AD'^2 - AD^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a$

Vậy $V_{\text{khối hộp chữ nhật}} = a.2a.a = 2a^3$ (dvtt).

Ví dụ 4: Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có A'A, AB, BC vuông góc nhau từng đôi một và A'A = 2a, AB = a, $BC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Giải

AA', AB, BC vuông góc từng đôi một



$\begin{cases} AA' \perp (ABC) \\ \text{Tam giác ABC vuông tại B} \end{cases}$

$\Rightarrow V_{\text{Khối lăng trụ}} = AA'.S_{\Delta ABC}$

$= \frac{1}{2}.AA'.AB.BC = a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

Ví dụ 5: Khối lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là ABC vuông cân ở A, mặt bên BB'C'C là hình vuông có diện tích bằng $2a^2$. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' .

Giải

BB'C'C là hình vuông có diện tích bằng $2a^2$.

$\Rightarrow BB' = BC = a\sqrt{2}$

Tam giác ABC vuông cân ở A và có cạnh huyền $BC = a\sqrt{2}$

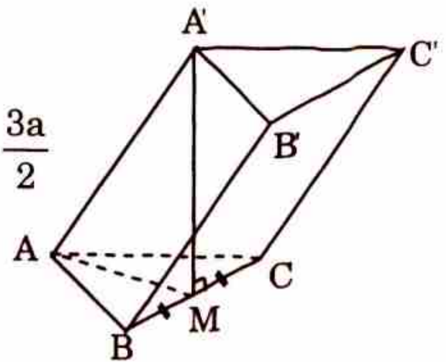
$\Rightarrow AB = AC = a.$

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = BB'.S_{\Delta ABC} = BB'.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 6: Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hình chiếu (vuông góc) của A' lên (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính thể tích của khối lăng trụ .

Giải

Tam giác A'AM vuông ở M nên:



$A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$

$\Rightarrow V_{\text{Khối lăng trụ}} = A'M\ S_{\Delta ABC}$

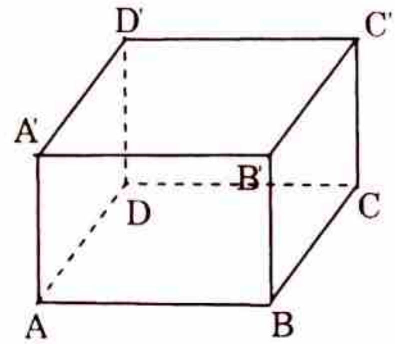
$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).

Chú ý: Trong tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên:

$\Rightarrow \begin{cases} AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Ví dụ 7: Khối lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D', AA'C'C là hình vuông và có diện tích bằng a^2. Tính thể tích của khối lăng trụ:

Giải



AA'C'C là hình vuông và có diện tích bằng a^2

=> AA' = AC = a

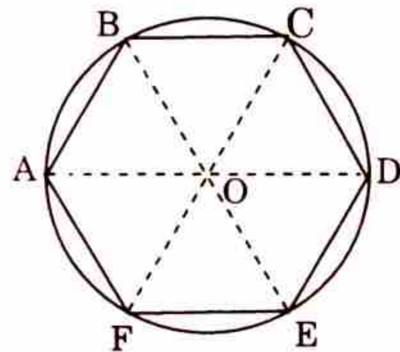
Hình vuông ABCD có đường chéo AC = a

=> Cạnh AB = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = AA'.S_{\Delta ABCD} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a = \frac{a^3}{2}$ đvtt.

Ví dụ 8: Khối lăng trụ lục giác đều ABCDEF A'B'C'D'E'F' có đáy nội tiếp đường tròn có đường kính bằng 2R và ADD'A' có diện tích bằng $3R^2$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải



$V_{\text{Khối lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.AA'$

Đáy ABCDEF là lục giác đều nội tiếp đường kính bằng 2R

$\Rightarrow S_{\text{đáy}} = 6.S_{\Delta OAB} = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

ADD'A' là hình chữ nhật nên có diện tích bằng AA'.AD = $3R^2$

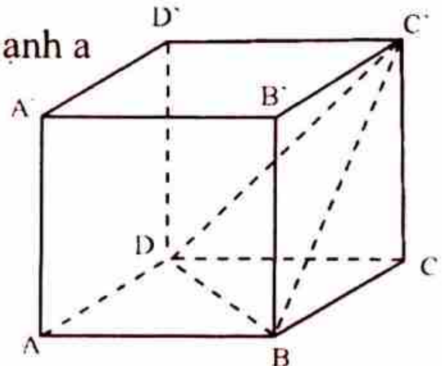
$\Leftrightarrow AA'.2R = 3R^2 \Leftrightarrow AA' = \frac{3R}{2}$.

Vậy $V_{\text{Khối lăng trụ}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3R}{2} = \frac{9R^3\sqrt{3}}{4}$ (đvtt).

Ví dụ 9: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a

a. Chứng minh rằng BDC' là tam giác đều.

b. Tìm thể tích của hình lập phương.



Giải

a. ΔBDC' có các cạnh BD = BC' = DC (vì chúng đều là đường chéo của hình vuông cạnh a) nên ΔBDC' là tam giác đều.

b. $V = a^3$

Ví dụ 10: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' biết rằng hình hộp chữ nhật có thể tích $60\,dm^3$, diện tích toàn phần $94dm^2$ và AB + BC = 7dm. Tính độ dài các cạnh AB, BC, AA'

ĐTS 10 Quốc học Huế 1998 – 1999

Giải

Gọi AB = x(dm); BC = y(dm) và AA' = z(dm).

Điều kiện: 0 < x < 7, 0 < y < 7 và z > 2. Diện tích toàn phần của hình hộp $2(xy + yz + zx)(dm^2)$. Thể tích của hình hộp: xyz (dm^3).

Theo đề ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xyz = 60 \\ 2(xy + yz + zx) = 94 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ xy + yz + zx = 47 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ xyz + yz^2 + z^2x = 47z \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ 60 + z^2(x + y) - 47z = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ 7z^2 - 47z + 60 = 0 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 60 \\ \left[\begin{array}{l} z_1 = 5 \\ z_2 = \dfrac{12}{7} \end{array}\right. \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 12 \\ z_1 = 5 \quad (*) \\ x + y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 35 \\ z_2 = \dfrac{12}{7} \quad (**) \\ x + y = 7 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải hệ phương trình (*).Do x + y =7 và xy = 12 nên x, y là nghệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 7X + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_1 = 3 \\ X_2 = 4 \end{array}\right.$

Từ đó suy ra $(x_1 = 3; y_1 = 4)$ hoặc $(x_2 = 4; y_2 = 3)$

Vậy hệ phương trình (*) có hai nghiệm $(x_1 = 3; y_1 = 4; z_1 = 5)$ hoặc $(x_1 = 4; y_2 = 3, z_1 = 5)$.

Giải hệ phương trình (**)

Do x + y = 7 và xy = 35 nên x, y là nghiệm của phương trình

$Y^2 - SY + P = 0 \Leftrightarrow Y^2 - 7Y + 35 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Suy ra hệ phương trình (**) vô nghiệm.

Do đó AB = 3(dm); BC = 4(dm); AA' = 5(dm).

Hoặc AB = 4 (dm); BC = 3(dm); AA' = 5(dm).

Dạng 2: Hình chóp

Ví dụ 1: Trong không gian, cho hình chóp tứ giác đều SABCD, ABCD là hình vuông cạnh 20, cạnh bên 24. Tính thể tích của khối chóp .

Giải

Tam giác ABC vuông cân tại B :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 800 \Rightarrow AC = 20\sqrt{2}$; $AO = \dfrac{AC}{2} = 10\sqrt{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O nên: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = 376 \Rightarrow SO = 2\sqrt{94}$

Do đó: $V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}.20^2.2\sqrt{94} = \dfrac{800\sqrt{94}}{3}$ (đvtt).

Ví dụ 2: Trong không gian, cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C'. Biết AB = a, AA' = 2a. Tính thể tích khối lăng trụ.

Giải

Vẽ đường cao AH của tam giác đều ABC.

Trong tam giác ABC ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}\ a\ \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ \text{(đvdt)}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ là:

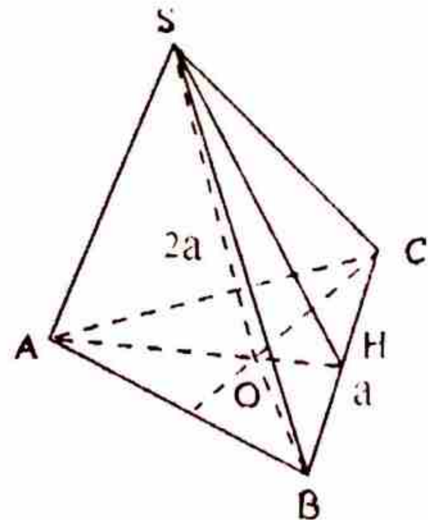
$$V = B.h = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}\ \text{(đvtt)}.$$

Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng ABC tại tâm O của tam giác ABC, trên d lấy điểm S sao cho SO = 2a.

a. Chứng minh SA = SB = SC.

b. Tính tổng diện tích các mặt của tứ diện.

Giải



a. Tam giác ABC đều nên OA = OB = OC; $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ (ba tam giác vuông có SO chung và OA = OB = OC).
Do đó SA = SB = SC.

b. Các mặt bên đều là những tam giác cân bằng nhau. Vậy tổng diện tích các mặt là:

$S = 3S_{\Delta SBC} + S_{\Delta ABC}; S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(diện tích tam giác đều cạnh a).

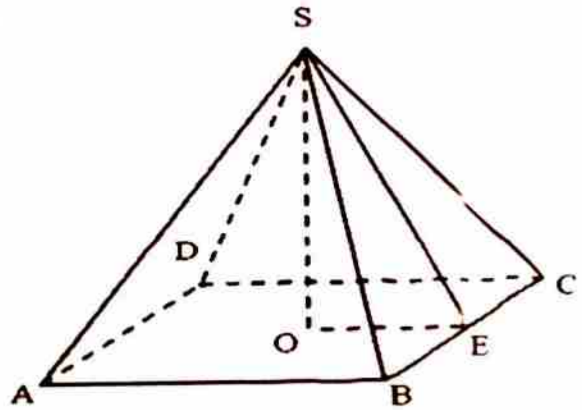
$S_{\Delta SBC}$: Gọi H là trung điểm của BC, đã biết $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của đều cạnh a). $OH = \frac{AH}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Trong tam giác vuông SOH, theo định lý Py-ta-go ta có: $SH^2 = SO^2 + OH^2 = 4a^2 + \frac{3a^2}{36} = \frac{48a^2 + a^2}{12} = \frac{49a^2}{12}$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{\frac{49a^2}{12}} = 7a\frac{\sqrt{3}}{6}; S_{ABC} = \frac{1}{2}a.\frac{7a\sqrt{3}}{6} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Do đó $S = 3.\frac{7a^2\sqrt{3}}{12} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Tìm diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.

Giải



+ $S_{xq} = \frac{1}{2}pd$ (p chu vi ABCD = 4a, d $= SE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của Δ đều cạnh a)).

$S_{xq} = 2a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$ (đvdt)

+ Gọi E là trung điểm của BC, trong tam giác vuông SOE thì

$SO^2 = SE^2 - OE^2$, $SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

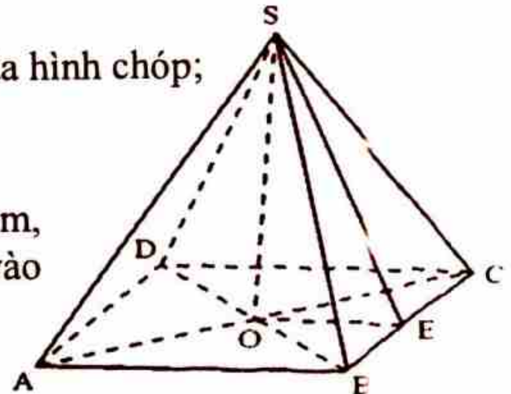
$V = \frac{1}{3}Bh$ (B là diện tích đáy $B = a^2; b = \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$).

Vậy $V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvdt)

Ví dụ 5: . Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bằng 20cm, cạnh bên bằng 24cm.

a. Tính đường cao SO và từ đó tính thể tích của hình chóp;

b. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.



Giải

Gọi E là trung điểm của BC vậy BE = 10cm, SB = 24cm. Áp dụng định lý Py-ta-go vào ΔSBEvuông ở E ta có:

$SE^2 = SB^2 - BE^2$

$SE^2 = 24^2 - 10^2 = 476 \Rightarrow SE = \sqrt{476} \approx 21,8(cm)$

Cũng áp dụng định lý Py-ta-go vào ΔSOE vuông ở O ta có:

$SO^2 = SE^2 - OE^2 = 476 - 100 = 376 \Rightarrow SO = \sqrt{376} \approx 19,4(cm)$.

Theo công thức tính thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}Bh$; h = SO = 19,4(cm)

$B = S_{ABCD} = 20.20 = 400(cm^2)$

Vậy $V = \frac{1}{3}400.19,4 = 2586,7(cm^3)$

Ví dụ 6: Cho hình chóp cụt tứ giác ABCD.A'B'C'D' có cạnh đáy là a và 2a đường cao của mặt bên bằng a.

a. Tính diện tích xung quanh.

b. Tính cạnh bên và đường cao.

Giải

a. Công thức tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt:

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p')d$$

p: Chu vi tứ giác ABCD;

p': Chu vi tứ giác A'B'C'D';

d: đường cao của mặt bên (d = M'M) d = a

Vậy $S_{xq} = \frac{1}{2}(4.2a + 4a).a = 6a^2$

b. Từ B' kẻ B'E // M'M ($E \in BC$) nên

$BE = BM - EM \Rightarrow BE = \frac{a}{2}$; B'E = MM' = a.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông BB'E ta có

$$BB'^2 = B'E^2 + BE^2 \Rightarrow BB'^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow BB' = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Từ M' kẻ M'I // OO' (thực hiện trong mặt phẳng OO'MM' do đường thẳng song song OM và O'M'). Như vậy M'I = OO', $IM = \frac{a}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác IMM' ta có:

$$M'I^2 = MM'^2 - IM^2 \Rightarrow M'I^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}. \text{ Nên } M'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A. Lấy một điểm S trên đường thẳng d; nối SA, SB, SC. Gọi O là trung điểm của BC. Tính thể tích hình chóp S.ABC, cho biết AB = a, $SO = a\sqrt{2}$.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 2000 – 2001

Giải

AO là trung tuyến của tam giác vuông BAC nên $AO = \frac{BC}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

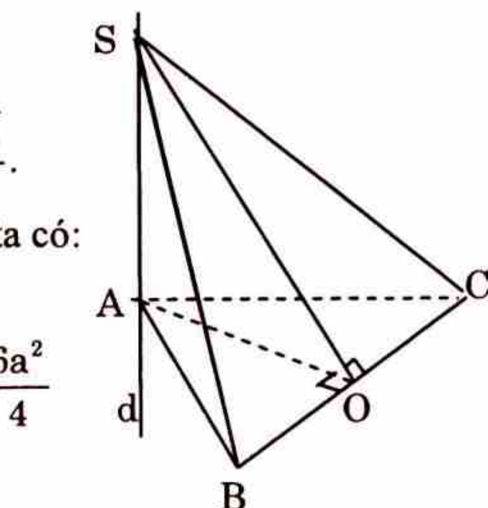
Từ đó ta có:

$$AO = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Áp dụng định lý vào tam giác vuông SAO ta có:

$SO^2 = SA^2 + OA^2$

$$\Rightarrow SA^2 = SO^2 - OA^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6a^2}{4}$$



$\Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của hình chóp S.ABC là:

$$V_{(SABC)} = \frac{1}{3}SA.\frac{AB.AC}{2} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12} \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 8: Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một đường thẳng d vuông góc với mp(ABCD) tại O. Lấy một điểm S trên đường thẳng d, nối SA, SB, SC, SD. Biết AB = a, $SA = a\sqrt{5}$. Tính diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD.

ĐTS 10 Quốc Học Huế 2001 – 2002

Giải

Diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD. Hình chóp SABCD có đáy là hình vuông và có chân đường cao trùng với tâm của hình vuông nên S.ABCD là hình chóp đều. Kẻ đường cao SE của tam giác SBC ta có E là trung điểm của BC vì tam giác SBC cân tại S cho nên $BE = \frac{a}{2}$. Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác SBE ta có:

$$SB^2 = SE^2 + BE^2 \Rightarrow SE^2 = SB^2 - BE^2$$

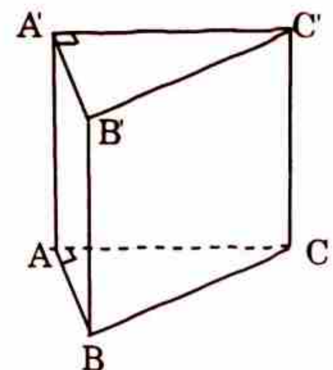
$$SE^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{19a^2}{4} \Rightarrow SE = \frac{a\sqrt{19}}{2}$$

Vậy: $S_{xq} = \dfrac{4.BC.SE}{2} = 2.a.\dfrac{a\sqrt{19}}{2} = a^2\sqrt{19}$ (đvdt)

Dạng 3: Hình trụ

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′ có cạnh bên AA′ = 2a, đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho.

Giải



Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ ABC.A'B'C' có:

- Hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp của hai ΔABC và ΔA'B'C'

Chiều cao là cạnh bên AA'

Vậy hình trụ nói trên có bán kính đáy là:

$R = \dfrac{BC}{2} = a\sqrt{3}$ và chiều cao h = 2a

⇒ Thể tích của khối trụ là:

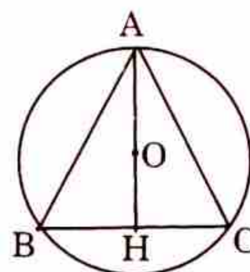
$V = \pi R^2 h = \pi(a\sqrt{3})^2.2a = 6\pi a^3$ (đvtt).

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đều ABC.A′B′C′ có cạnh đáy bằng a và mặt bên AA′B′B là hình vuông. Hình trụ ngoại tiếp lăng trụ ABC.A′B′C′. Tính diện tích toàn phần của hình trụ .

Giải

Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ ABC.A'B'C' có:

Hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác ABC và tam giác A'B'C'. Chiều cao bằng cạnh bên. Vậy hình trụ nói trên có bán kính đáy là: $R = AO = \frac{2}{3}.AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Chiều cao h = AA' = a

=> Diện tích toàn phần của hình trụ là:

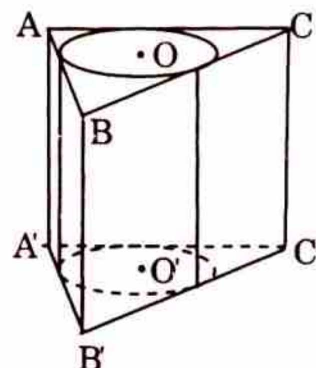
$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\pi Rh + 2.\pi R^2$

$= 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3}a + 2\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+1)$ (đvdt)

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có cạnh bên AA'= 3a, đáy ABC là tam giác vuông ở A với AB = 3a, AC = 4a. Hình trụ T nội tiếp ABC.A'B'C' (T có hai đáy lần lượt là hai hình tròn nội tiếp tam giác ABC và tam giác A'B'C'). Tính thể tích của khối trụ T .

Giải

Hình trụ (nói ở đề bài) có: Bán kính r bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chiều cao h = cạnh bên AA' = 3a



Tính r: Tam giác ABC vuông ở A

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$

* $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 6a^2$.

Nửa chu vi của tam giác ABC là :

$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = 6a \Rightarrow r = \frac{S}{p} = a$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi a^2.3a = 3\pi a^3$ (đvtt).

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và AA'C'C cũng là hình vuông. Hình trụ nội tiếp hình hộp chữ nhật đã cho (hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai đáy của hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D'). Tính diện tích xung quanh của hình trụ .

Giải

Hình trụ đã cho có: Bán kính r bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD nên $R = \frac{a}{2}$. Chiều cao $h = AA' = AC = a\sqrt{2}$. (Hình vuông AA'C'C có cạnh $AC = a\sqrt{2}$).

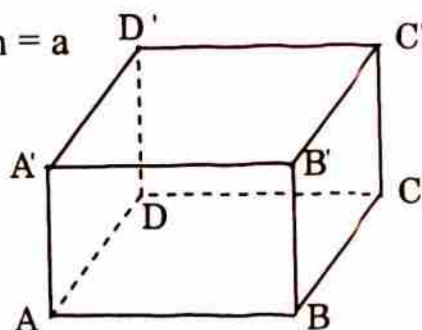
Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi\frac{a}{2}a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2} \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 5: Cho hình lập phương có cạnh bằng a là hình trụ ngoại tiếp hình lập phương đã cho. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của khối lập phương và khối trụ.Tính tỉ số $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Giải

Thể tích của khối lập phương $V_1 = a^3$. Hình trụ ngoại tiếp hình lập phương nên hình trụ có: Bán kính R = bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh bằng a = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.Chiều cao h = a



⇒ Thể tích khối trụ là:

$V_2 = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .a = \frac{\pi a^3}{2}$.

Vậy kết quả $k = \frac{V_1}{V_2} = a^3 : \frac{\pi a^3}{2} = \frac{2}{\pi}$.

Ví dụ 6: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a và AA'C'C là hình vuông. Cho hình trụ ngoại tiếp ABCD.A'B'C'D' (Hai đáy của hình trụ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp ABCD và A'B'C'D') . Tính diện tích xung quanh của hình trụ .

Giải

Hình trụ ngoại tiếp hình hộp chữ nhật (theo đề bài) nên hình trụ có:
Bán kính R bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ABCD

$\frac{AC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

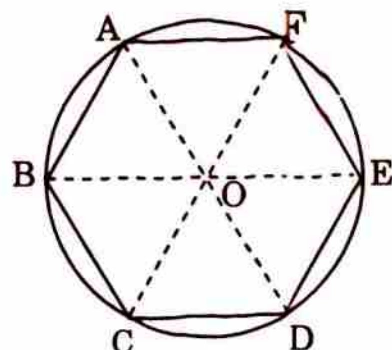
Chiều cao h bằng cạnh bên AA' = $a\sqrt{5}$ (Vì hình vuông AA'C'C có cạnh AC = $a\sqrt{5}$). Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{5} = 5\pi a^2 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ7: Cho hình lăng trụ lục giác đều ABCEF.$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ có các cạnh đáy bằng a và mặt bên AA'B'B là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$ Cho hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ nói trên. Tính thể tích của khối trụ

Giải

ABCDEF là lục giác đều có cạnh bằng a nên đường tròn ngoại tiếp ABCDEF có bán kính bằng a. AA'B'B có diện tích bằng AA'.AB = $2a^2 \Leftrightarrow AA' = \frac{2a^2}{AB} = 2a$



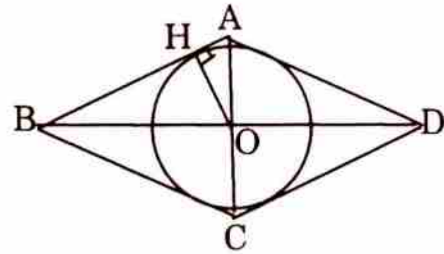
Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ (nói ở đề bài)

Ta có: Bán kính R = a. Chiều cao h = 2a.

⇒ Thể tích của khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$ (đvtt).

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và AC = a. Cho hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp ABCD và A'B'C'D'). Tính bán kính đáy của hình trụ .

Giải



Hình trụ nội tiếp lăng trụ ABCD.A'B'C'D'.

Ta có: Bán kính R bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi ABCD. Tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a (vì AB = BC = AC = a).

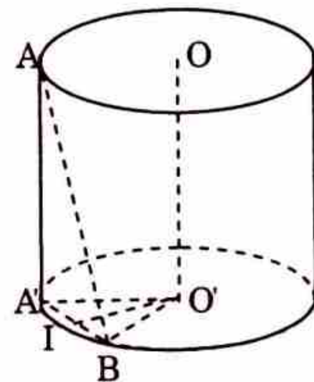
Vẽ $OH \perp AB$, $H \in AB$ (Bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi ABCD là OH). Tam giác OAB vuông ở O và có đường cao OH nên

$$OH.AB = OA.OB \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy bán kính đáy của hình trụ là $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 9: Một hình trụ có diện tích xung quanh là S bằng diện tích đáy, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a.Tính thể tích khối trụ .

Giải



Kí hiệu bán kính đáy và chiều cao hình trụ đó lần lượt là R và h. Khi đó:

$S_đ = \pi R^2 = 4\pi a^2$; $S_{xq} = S = 2\pi Rh$.

Từ các hệ thức trên ta có R = 2a và $h = \frac{S}{4\pi a}$.

Như vậy thể tích khối trụ là:

$V = \pi R^2 h = \pi 4a^2 \frac{S}{4\pi a} = Sa$ (đvtt).

Ví dụ 10: Một hình trụ có diện tích xung quanh là S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu bán kính bằng a. Tính diện tích thiết diện qua trục của hình trụ .

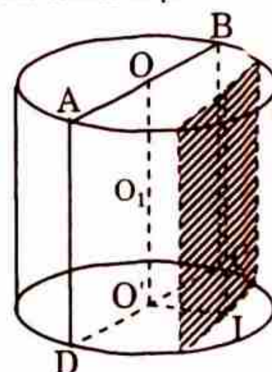
Giải

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật có các kích thước là 2R và h. Vậy diện tích thiết diện qua trục của hình trụ là

$$2Rh = 4a.\frac{S}{4\pi a} = \frac{S}{\pi} \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 11: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và đường sinh bằng 2a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích hình trụ.

Giải



$S_{xq} = 2\pi Rh, R = a, h = 2a$

$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi.a.2a = 4\pi a^2$

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d; S_d = \pi R^2 = \pi a^2$

$\Rightarrow S_{tp} = 4\pi a^2 + 2\pi a^2 = 6a^2$

$V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$

Ví dụ 12: Thiết diện qua trục của một hình trụ là hình vuông cạnh a. Tìm diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

Giải

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông cạnh a như vậy đường cao của hình trụ là a, $R = \frac{a}{2}$.

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R) = 2\pi\frac{a}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4}.$$

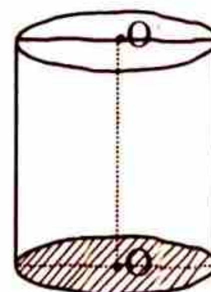
Ví dụ 13: Một mặt phẳng đi qua trục OO' của một hình trụ, phần mặt phẳng đó bị giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích là $72cm^2$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ, biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao.

Đề TS 10 Quốc Học Huế 1996 – 1997

Giải

Gọi d (cm) là độ dài đường kính đường tròn mặt đáy. h(cm) là độ dài đường cao hình trụ. Điều kiện: d > 0, h > 0.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:



$$\begin{cases} d.h = 72 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d.2d = 72 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 36 \\ 2d = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |d| = 6 \\ 2d = h \end{cases}$$

Nhưng d > 0 và h > 0 nên ta có d = 6 và h = 12.

Diện tích xung quanh (Sxq) và thể tích hình trụ (V) được tính như sau:

$$S_{xq} = \pi d.h = \pi.6.12 = 72\pi\left(cm^2\right); V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2.h = \pi.3^2.12 = 108\pi\left(cm^3\right)$$

Ví dụ 14: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng 2a. Tính diện tích xung quanh; diện tích toàn phần và thể tích hình trụ.

Giải

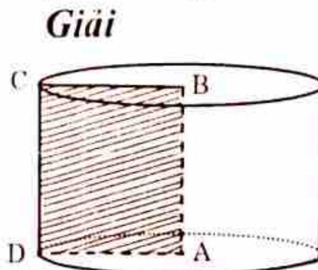
a. $S_{xq} = 2\pi.R.h = 2\pi.a2a = 4\pi a^2$ (dvdt)

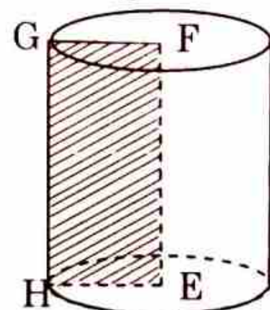
b. $S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 4\pi a^2 + 2\pi a^2 = 6\pi a^2$ (dvdt)

c. $V = \pi R^2.h = \pi.a^2.2a = 2\pi a^3$ (dvdt)

Ví dụ 15: Hai hình chữ nhật ABCD và EFGH có cạnh AB = 3cm, BC = 4cm, EF = 12cm, FG = 2cm. Cho hình chữ nhật thứ nhất quay quanh AB và hình chữ nhật thứ hai quay quanh EF. Chứng minh rằng hai hình trụ được tạo thành có diện tích toàn phần bằng nhau và thể tích bằng nhau.

Giải





a. $S_{xq1} = 2\pi.4.3 = 24\pi(cm^2)$

$2S_{đ1} = 2\pi.4^2 = 32\pi(cm^2)$;

$S_{tp1} = 56\pi(cm^2)$

b. $S_{xq2} = 2\pi.2.12 = 48\pi(cm^2)$

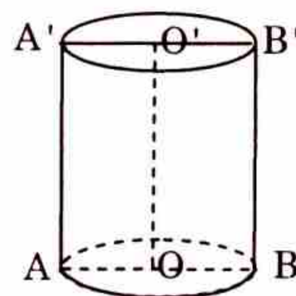
$2S_{đ2} = 2\pi.2^2 = 8\pi(cm^2)$; $S_{tp2} = 56\pi(cm^2)$. Vậy $S_{tp1} = S_{tp2}$

$V_1 = \pi.4^2.3 = 48(cm^3)$; $V_2 = \pi.2^2.12 = 48\pi(cm^3)$. Vậy $V_1 = V_2$

Ví dụ 16: Mặt phẳng đi qua trục có hình trụ, phần mặt phẳng đó bị giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật có diện tích $72cm^2$. Tính bán kính đáy và đường cao hình trụ biết rằng đường kính đáy bằng một nửa đường cao

Giải

Hình chữ nhật giới hạn bởi hình trụ có một cạnh bằng 2R và một cạnh bằng h. Theo đề bài: $2R = \dfrac{h}{2}$



Do đó $\dfrac{h^2}{2} = 72 = h^2 = 144 \Leftrightarrow h = 12(cm)$

Vậy $\begin{cases} h = 12(cm) \\ R = 3(cm) \end{cases}$

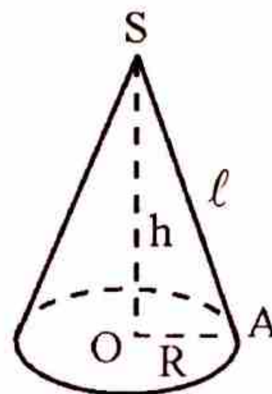
Dạng 4: Hình nón

Ví dụ 1: Cho hình nón biết diện tích xung quanh bằng $400\pi\ cm^2$, độ dài đường sinh bằng 25cm.

a. Tính bán kính đáy.

b. Tính diện tích toàn phần và thể tích.

Giải



a. $S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow R = \dfrac{S_{xq}}{\pi l}$ vậy $R = \dfrac{400\pi}{\pi 25}$

R = 16(cm).

Trong tam giác vuông SOA:

$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 25^2 - 16^2 \Rightarrow SO = 19,2$ (cm);

b. $S_{tp} = S_{xq} + S_đ$; biết $S_{xq} = 400\pi\, cm^2$

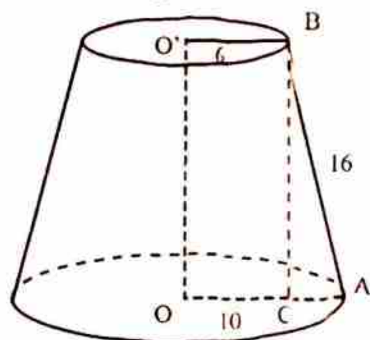
$S_đ = \pi R^2 \Rightarrow S_đ = \pi.16^2 = 256\pi$, vậy $S_{tp} = 400\pi + 256\pi = 656\pi (cm^2)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.16^2.25 = \frac{6400\pi}{3}(cm^3)$

Ví dụ 2: Cho hình nón cụt với hai bán kính đáy lần lượt bằng 6cm và 10cm, đường sinh bằng 16cm.

a. Tính diện tích xung quanh.

b. Tính đường cao và thể tích hình nón cụt đó.



Giải

a. $S_{xq} = \pi\ell(R + R')$

$S_{xq} = \pi.16(10 + 6) = 256\pi(cm^2)$

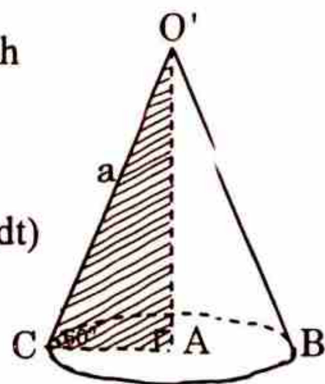
b. Từ B kẻ BC // OO' ($C \in OA$)

Vậy BC = OO', O'B = OC = 6 ⇒ CA = 4. Trong tam giác vuông ABC, ta có $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 16^2 - 4^2 = 240 \Rightarrow BC = 4\sqrt{15}$

$V = \frac{1}{3}h(R^2 + R'^2 + RR').\pi = \frac{1}{3}.4\sqrt{15}(100 + 36 + 60).\pi = \frac{784.\pi}{3}\sqrt{15}(cm^3)$

Ví dụ 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều cạnh a. Tìm diện tích toàn phần và thể tích của hình nón.

Giải



Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều cạnh a vậy đường cao của hình nón $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \ell = a, R = \frac{a}{2}$

$S_{tp} = \pi R\ell + \pi R^2 = \pi R(\ell + R) = \pi\frac{a}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{4}$ (đvdt)

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}\pi}{24}$ (đvdt)

Ví dụ 4: Tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^0$) quay chung quanh AB, tính bán kính đáy và đường cao hình nón được tạo thành, từ đó tính thể tích và diện tích xung quanh của nó, biết rằng BC = a và $\widehat{ACB} = 60^0$

Giải

ΔABC là nửa tam giác đều, BC = a $\Leftrightarrow AC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

Và $AB^2 = BC^2 - AC^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy bán kính đáy hình nón $R = \frac{a}{2}$. Chiều cao hình nón: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó: thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi.a^3.\sqrt{3}}{24}$ (đvdt)

* Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi.R.\ell = \pi.\frac{a}{2}.a = \frac{\pi.a^2}{2}$ (đvdt)

Ví dụ 5: Một chi tiết máy có dạng như hình vẽ:

a. Tính diện tích mặt ngoài của chi tiết.

b. Tính thể tích

Giải

a. Diện tích xung quanh hình trụ có đường kính đáy 0,2m; chiều cao 1m là: $2\pi(0,1)1 = 0,2\pi(m^2)$

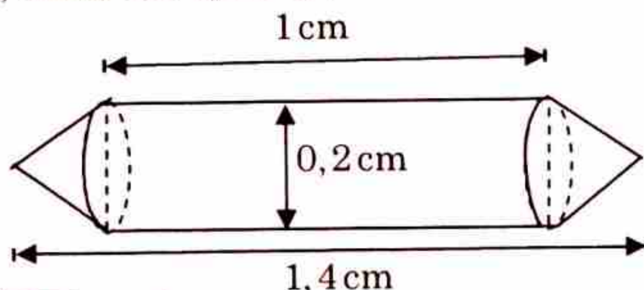
Hình nón có đường kính đáy 0,2m; chiều cao 0,2m có:

- Độ dài đường sinh:

$\ell = \sqrt{(0,2)^2 + (0,1)^2} = \sqrt{0,05}$

- Diện tích xung quanh:

$\pi(0,1)\sqrt{0,05} = 0,1\pi\sqrt{0,05}(m^2)$



Diện tích cần tìm sẽ là:

$S = 0,2\pi + 0,2\pi\sqrt{0,05} = 0,2\pi(1+\sqrt{0,05})(cm^2)$

b. Thể tích hình trụ ở câu a: $\pi.(0,1)^2.1 = 0,01\pi(m^3)$

Thể tích hình nón: $\frac{0,2.\pi(0,1)^2}{3}(cm^3)$

Thể tích cần tìm sẽ là: $V = 0,01\pi + \frac{0,004\pi}{3} = \frac{0,034\pi}{3}(m^3)$.

Ví dụ 6: Tính thể tích một cái thùng được biểu diễn như hình vẽ

Giải

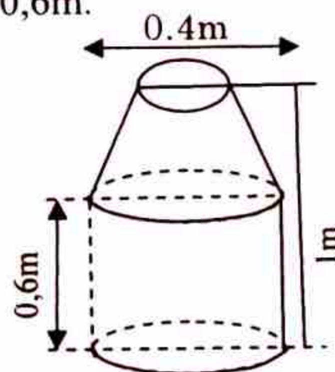
Thể tích hình trụ có đường kính đáy 0,6m; chiều cao 0,6m.

$V_1 = \pi(0,3)^2.0,6 = 0,054\pi(m^3)$

Thể tích hình nón cụt có các đường kính đáy 0,6m và 0,5m; chiều cao 0,4m.

$V_2 = \frac{\pi(0,4)}{3}.(0,09+0,04+0,06) = \frac{0,076\pi}{3}(m^3)$

Thể tích cái thùng là: $V = V_1 + V_2 = \frac{0,238\pi}{3}(m^3)$



Ví dụ 7: Một cái xô dạng hình nón cụt có bán kính hai đáy là 19cm và 9cm, độ dài đường sinh ℓ là 26cm. Trong xô đã chứa sẵn lượng nước có chiều cao 18cm so với đáy dưới.

a. Tính chiều cao của cái xô.

b. Hỏi phải đổ thêm bao nhiêu lít nước để đầy xô?

Đề TS lớp 10 THPTTP Huế 2007 -2008

Giải

a. Cắt hình nón cụt bởi mặt phẳng qua trục OO', ta được hình thang cân $AA'BB'$. Từ A hạ AH vuông góc với $A'B'$ tại H, ta có:

$$A'H' = O'A' - OA = 10 \text{ (cm)}$$

Suy ra: $OO' = AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ (cm)}$

b. Mặt nước với mặt phẳng cắt có đường thẳng chung là IJ, IJ cắt AH tại K.

Theo giả thiết ta có: $HK = AH - AK = 24 - 18 = 6$ (cm)

Bán kính đáy trên của khối nước trong xô là: $r_1 = O_1I = O_1K + KI = 9 + KI$

Do $KI // A'H \Rightarrow \dfrac{KI}{HA'} = \dfrac{AK}{AH} \Rightarrow KI = 7,5 \Rightarrow r_1 = 16,5$ (cm)

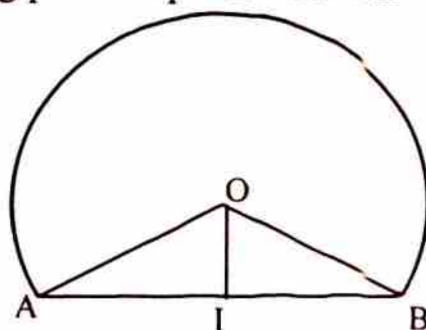
Thể tích khối nước cần đổ thêm để đầy xô

$$V = \frac{1}{3}\pi.h\left(r^2 + rr_1 + r_1^2\right) = \frac{1}{3}.6\pi\left(19^2 + 19.16,5 + 16,5^2\right)$$

$V \approx 5945,59 \text{ cm}^3 = 5,94559 \text{ dm}^3 \approx 5,9$ lít.

Ví dụ 8: Để làm một cái phễu hình nón không nắp bằng bìa cứng bán kính $r = 12$ cm, chiều cao $h = 16$ cm, người ta cắt từ một tấm bìa ra hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón, sau đó cuộn lên. Trong hai tấm bìa hình chữ nhật: Tấm bìa A có chiều dài 44 cm, chiều rộng 25 cm, tấm bìa B có chiều dài 42 cm, chiều rộng 28 cm, có thể sử dụng tấm bìa nào để làm ra cái phễu hình nón nói trên mà không phải chắp nối? Giải thích.

Giải



Đường sinh của hình nón có chiều dài:

$\ell = \sqrt{r^2 + h^2} = 20$ (cm)

Hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón là hình quạt của hình tròn bán kính ℓ, số đo của cung của hình quạt là:

$$n^0 = \frac{360r}{\ell} = \frac{360.12}{20} = 216^0;\ \widehat{AOI} = 72^0 \Rightarrow \frac{OI}{OA} = \cos\widehat{AOI}$$

$\Rightarrow OI = 20\cos 72^0 \approx 6,2$ (cm). Do đó, để cắt được hình quạt nói trên thì phải cần tấm bìa hình chữ nhật có kích thước tối thiểu: chiều dài 40cm, rộng $(20 + 6,2) = 26,2$cm. Vậy phải dùng tấm bìa B mới cắt được hình khai triển của mặt xung quanh của hình nón mà không bị chắp vá.

Ví dụ 9: Cho nửa đường tròn đường kính DE và tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và $DB = CE = 1$ cm. Khi đó toàn bộ hình vẽ quay một vòng quanh DE thì nửa hình tròn tạo thành hình (S_1) và tam giác ABC tạo thành hình (S_2). Hãy mô tả các hình (S_1) và (S_2). Tính thể tích phần của (S_1) nằm ngoài hình (S_2).

Giải

a. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Khi quay toàn bộ hình vẽ một vòng quanh DE thì: Nửa hình tròn tạo thành một hình cầu đường kính DE = 2R Hai tam giác vuông AHB và AHC tạo thành 2 hình nón có chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính r = HA và 2 đỉnh là B và C.

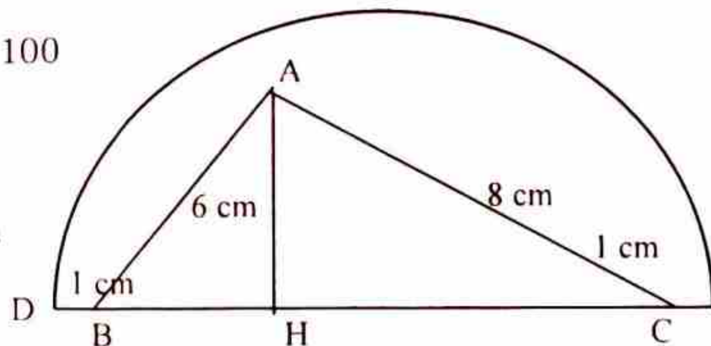
Trong tam giác vuông ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$\Rightarrow BC = 10cm$

$BC.AH = AB.AC$

$\Rightarrow r = AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = 4,8cm$



Thể tích hình cầu đường kính AB:

$V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi 6^3}{3} = 288\pi\ (cm^3)\ (\approx 904,32\ cm^3)$

Tổng thể tích của hai hình nón:

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r^2.HB + \dfrac{1}{3}\pi r^2.HC = \dfrac{1}{3}\pi r^2.BC = 76,8\pi\ (cm^3)\ (\approx 241,152\ cm^3)$

Vậy thể tích phần của hình (S_1) nằm bên ngoài hình (S_2) là:

$V = V_1 - V_2 = 288\pi - 76,8\pi = 211,2\pi(cm^3)\ (\approx 663,168cm^3)$.

Dạng 5: Hình cầu

Ví dụ 1:

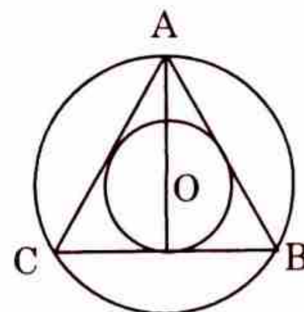
a. Tính diện tích mặt ngoài và thể tích hòn bi thép có đường kính 1cm.

b. Tính diện tích da để làm một quả bóng đá có đường kính 20 cm (không kể da dùng cho các chỗ ghép uốn).

Giải

a. Diện tích mặt ngoài viên bi: $S = 4\pi R^2 = 4\pi(cm^2)$

* Thể tích hòn bi thép: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}(cm^3)$



b. Diện tích da cần làm quả bóng không cần kể các chỗ ghép nối:

$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi(20)^2 = 1600\pi(cm^2)$

Ví dụ 2: Cho tam giác đều ABC có cạnh AB = 10cm và đường cao AH. Tìm thể tích hai hình cầu tạo thành khi quay nửa hình tròn nội tiếp và nửa hình tròn ngoại tiếp tam giác một vòng quanh AH.

Giải

ΔHAB vuông tại H:

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 100 - 25 = 75 \Leftrightarrow AH = 5\sqrt{3}(cm)$

Bán kính hình tròn ngoại tiếp tam giác: $R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Bán kính hình tròn nội tiếp tam giác: $r = OH = \frac{AH}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}(cm)$.

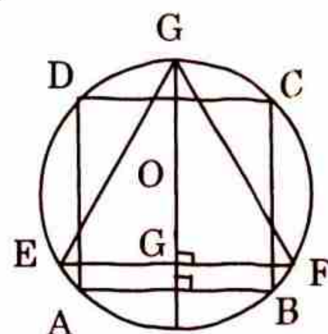
Do đó: thể tích hình cầu lớn tạo thành $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{27}(cm^3)$.

Thể tích hình cầu nhỏ được tạo thành: $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{500\pi\sqrt{3}}{27}(cm^3)$.

Ví dụ 3: Trong đường tròn (O) tâm O, bán kính R, nội tiếp một hình vuông ABCD và một tam giác đều EFG sao cho đường cao GG' = h của tam giác song song với cạnh BC của hình vuông. Cho hình vẽ quay quanh GG`.

1. Chứng minh rằng thể tích hình trụ gây ra bởi hình vuông là trung bình nhân giữa thể tích của hình cầu và hình nón gây ra theo thứ tự bởi (O) và ΔABC.
2. Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của hình trụ cũng là trung bình nhân giữa diện tích toàn phần của hình cầu và hình nón.

Giải



1. Thể tích của hình cầu: $V_1 = \frac{4}{3}\pi.R^3$ (đvtt)

Thể tích của hình nón đỉnh G, đường cao GG' = h = 3R/2, bán kính đường tròn đáy $G'E = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.G'E^2GG' = \frac{1}{3}\pi.\frac{3R^2}{4}.\frac{3R}{2} = \frac{3}{8}\pi.R^3$ (đvtt).

Thể tích của hình trụ gây ra bởi hình vuông ABCD khi quay quanh GG' là: $V = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2.BC = \pi.\frac{2R^2}{4}.R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$ (đvtt)

Ta có $V_1.V_2 = \frac{4}{3}\pi.R^3.\frac{3}{8}.\pi.R^3 = \frac{1}{2}\left(\pi R^3\right)^2 = V^2$. Vậy $V^2 = V_1.V_2$

2. Diện tích của mặt cầu: $S_1 = 4\pi R^2$

Diện tích toàn phần của hình nón:

$S_2 = S_{xq} + S_d = \pi.\frac{R\sqrt{3}}{2}.R\sqrt{3} + \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi R^2$.

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$$S = S_{xq} + S_d = 2\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right).R\sqrt{2} + 2\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3\pi R^2$$

Ta có: $S_1.S_2 = 4\pi R^2.\frac{9}{4}\pi.R^2 = \left(3\pi R^2\right)^2 = S^2$. Vậy $S^2 = S_1.S_2$

Ví dụ 4: Một thùng sắt đậy kín hình lập phương. Biết rằng trong thùng chứa 9 khối có dạng hình cầu cùng bán kính, làm bằng chất liệu rất rắn.

Chứng minh rằng nếu cạnh của thùng hình lập phương là a thì đường kính của các khối cầu bên trong nó nhỏ hơn hoặc bằng $(2\sqrt{3} - 3)a$.

Đề TS lớp 10 chuyên TPHCM 2006-2007

Giải

Gọi O là tâm hình lập phương (L) đang xét. Dựng hình lập phương (L_1) có cùng tâm O, có cạnh song song với cạnh của (L) và có độ dài cạnh là $a - 2r$, với r là bán kính của hình cầu. Chín tâm của 9 hình cầu đều nằm trong (L_1) (hoặc ở trên mặt). Chia (L_1) thành 8 hình lập phương con bởi ba mặt phẳng qua O và song song với mặt của (L_1). Phải có một hình lập phương con (L_2) trong chúng chứa ít nhất 2 tâm hình cầu. Đường chéo của hình lập phương con (L_2) là: $\frac{1}{2}(a - 2r)\sqrt{3}$

Khoảng cách hai tâm hình cầu lớn hơn hoặc bằng 2r.

Vì vậy $\frac{1}{2}(a - 2r)\sqrt{3} \geq 2r$ hay $2r \leq \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3} - 3\right)a$

Ví dụ 6: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy là a, chiều cao $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

a. Tìm tâm và bán kính mặt cầu (S) qua các điểm S, A, B, C, D.
b. Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn này.
c. Tính thể tích hình cầu ở ngoài hình chóp.

Giải

a. Gọi I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S).

O' là hình chiếu vuông góc của I trên (ABCD).

Do IA = IB = IC = ID nên các tam giác vuông O'IA, O'IB, O'IC, O'ID bằng nhau. $\Rightarrow$ O'A = O'B = O'C = O'D

$\Rightarrow$ O' là tâm của hình vuông ABCD. $\Rightarrow O' \equiv O$. Như vậy: I thuộc đường thẳng SO. Ngoài ra: IS = IA nên trong mặt phẳng (SOA) I chính là giao điểm của đường trung trực của đoạn SA và đường thẳng SO.

Nếu J là trung điểm của đoạn SA thì: Trong ΔOSA vuông tại O, ta có:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.$$

Ngoài ra: SIJ ~ SAO nên: $\frac{SJ}{SO} = \frac{SI}{SA}$

Vậy, bán kính mặt cầu (S): $R = \frac{2a^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{24\pi a^3\sqrt{6}}{81}$$

b. Mặt phẳng (SAB) cắt (S) theo một đường tròn có tâm là hình chiếu vuông góc của I trên (SAB).Gọi K là trung điểm của AB và IH là đường cao của ΔISK.

$$\begin{cases} AB \perp OK \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow AB \perp IH$$

$$\begin{cases} IH \perp SK \\ IH \perp AB \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SAB)$$

Vậy: chân đường cao IH của ΔSIK là tâm của đường tròn.

$$\Delta SIH \sim \Delta SKO \Rightarrow \frac{IH}{KO} = \frac{SI}{SK}$$

$$\Rightarrow IH = \frac{KO.SI}{SK} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{6a^2}{9}}} = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

ΔHAI vuông tại H:

$$AH^2 = AI^2 - IH^2 = \frac{6a^2}{9} - \frac{22a^2}{121} = \frac{16a^2}{33} \Rightarrow AH = \frac{4a}{\sqrt{33}}$$

Vậy bán kính của đường tròn này $r = \frac{4a\sqrt{33}}{33}$

c. Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{27}a^3$ (đvtt)

Thể tích hình chóp: $V_2 = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Thể tích cần tìm: $V_1 = V - V_2 = \left(\frac{8\pi\sqrt{6}}{27} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)a^3 = \frac{\sqrt{6}(16\pi - 9)}{54}a^3$ (đvtt)

Bài tập vận dụng

1. Một hình trụ có bán kính đáy là R, chiều cao 2R. Một đoạn thẳng AB có 2 đầu thuộc hai đường tròn đáy, góc giữa AB và trục hình trụ bằng α

a. Tính độ dài đoạn AB trong trường hợp $\alpha = 30^0$.

b. Tìm giá trị của α để độ dài AB lớn nhất.

2. Một hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h. Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường sinh bất kỳ của hình lăng trụ, phần của (P) giới hạn bởi hình trụ là một hình chữ nhật. Tìm (P) để diện tích hình chữ nhật lớn nhất.

3. Một hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h. Tính:

a. Thể tích hình lăng trụ tứ giác đều có đáy nội tiếp đáy hình trụ.

b. Diện tích toàn phần hình lăng trụ tam giác đều có đáy ngoại tiếp đáy hình trụ.

4. Cho hình trụ có hai đáy là các hình tròn tâm O và O' bán kính R; chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Gọi A, B là 2 điểm lần lượt thuộc các đường tròn (O) và (O') sao cho OAO'B.

a. Chứng minh tứ diện OAO'B có các mặt đều là tam giác vuông. Tính thể tích và diện tích toàn phần tứ diện này.

b. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với OO' tại trung điểm I của OO'. (P) cắt các mặt của tứ diện OAO'B tạo thành hình gì? Tính diện tích hình đó.

5. Tính diện tích toàn phần hình nón biết đường sinh có độ dài bằng *l*, phần mặt phẳng qua trục hình nón giới hạn bên trong hình nón là một miền tam giác đều.

6. Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích các hình tròn xoay tạo ra bởi tam giác quay quanh cạnh huyền và các cạnh góc vuông.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$

7. Trong một hình nón, tìm góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh của nó.

8. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính R, chiều cao hình nón là $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. AB là một dây của đáy sao cho khoảng cách giữa O là mặt phẳng (SAB) là $\frac{R\sqrt{3}}{4}$. Tính độ dài dây AB.

9. Tính thể tích hình nón biết hình chóp tam giác đều có cùng đỉnh với hình nón và đáy là tam giác đều nội tiếp đáy hình nón có thể tích là V.

10. Cho hình nón đỉnh S bán kính đáy R, góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh là 60^0; xét hình chóp đều SABC với ABC là tam giác đều ngoại tiếp đáy hình nón.

a. Tính thể tích và diện tích toàn phần hình chóp.

b. Mặt phẳng (P) song song với mp (ABC) chia hình chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích hình tròn nằm trên (P) giới hạn bởi hình nón.

11. Cho hình nón có đỉnh S, bán kính đáy là R và đường cao bằng h. Mặt phẳng (P) song song với đáy hình nón đi qua trung điểm đường cao chia hình nón làm hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

12. Cho hình nón cụt có bán kính đáy lớn gấp hai bán kính đáy nhỏ phần mặt phẳng (P) chứa hai đường sinh và đi qua trục hình nón cụt giới hạn bởi hình nón cụt là một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc.
Tính thể tích và diện tích xung quanh hình nón cụt biết chiều cao là h.

13. Cho hình nón cụt có các bán kính là R và $r(R > r)$. Một mặt phẳng song song với đáy hình nón cụt chia hình nón cụt ra hai phần có thể tích bằng nhau. Tính bán kính của hình tròn là phần của mặt phẳng (P) giới hạn bởi hình nón cụt.

14. Cho mặt cầu đường kính SS' = 2R. Gọi H là điểm trên đoạn SS' sao cho HS = 2HS'. Mặt phẳng (P) qua H vuông góc SS' cắt mặt cầu theo một đường tròn (C). ABC là một tam giác đều nội tiếp với (C).

a. Chứng minh SABC là tứ diện đều. Tính thể tích V của tứ diện đó.

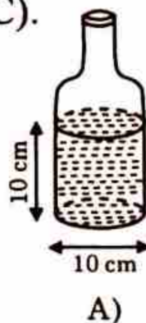
b. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S', đáy là hình tròn (C). Chứng minh các đường sinh S'A, S'B, S'C của hình nón đôi một vuông góc.

15. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) tâm O đường kính AB = 2R. Gọi S là điểm đối xứng của O qua A, d là đường thẳng qua S vuông góc (P) và T là điểm thuộc d sao cho ST = 2R.

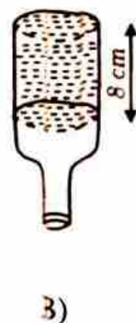
a. Tìm tâm I của mặt cầu (S) đi qua T và chứa (C).

b. Tính độ dài đoạn OI và thể tích hình cầu (C).

16. Một chai có phía dưới là hình trụ chứa một lượng nước có chiều cao 10cm như ở hình bên. Người ta lật ngược chai lại thì phần chia không chứa nước là một hình trụ có chiều cao 8cm. Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng 10.



A)



B)

17. Có ba vật hình trụ bằng chì, bằng sắt, bằng nhôm có cùng khối lượng bằng 2kg và cùng có đường kính đáy bằng 10. Tính chiều cao của mỗi vật, biết rằng khối lượng riêng của chì là 11,3 kg/dm^3, khối lượng riêng của sắt là 7,8kg/dm^3, khối lượng riêng của nhôm là 2.7 kg/dm^3.

18. Một băng giấy dài được cuộn chặt lại 60 vòng làm thành một cuộn giấy hình trụ rỗng. Biết đường kính của đường tròn trong cùng bằng 2cm, đường kính của đường tròn ngoài cùng bằng 6cm. Tính chiều dài của băng giấy (làm tròn đến 0,1).

19. Người ta cần cưa một thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được một khúc gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.

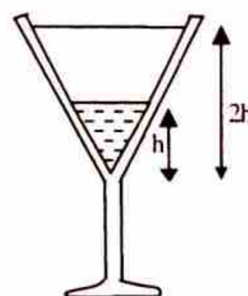
19. Người ta cần cưa một thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được một khúc gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.

20. Chú kiến và giọt mật. Một chú kiến ở vị trí A trên mặt ngoài của một lọ thủy tinh hình trụ (không có nắp), nhìn thấy một giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí B. Biết A cách miệng lọ 5cm, B cách miệng lọ 2cm và độ dài của đường tròn miệng lọ bằng 48cm. Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò được tới chỗ giọt mật.

21. Chứng minh rằng trong các hình trụ có cùng thể tích, hình trụ có đường cao bằng đường kính của đáy là hình có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

22. Cho tam giác OBC vuông tại O. Nếu quay tam giác đó quanh cạnh OB cố định thì được một hình nón có thể tích 800π, còn nếu quay tam giác đó quanh cạnh OC cố định thì được một hình nón có thể tích 1920π. Tính các độ dài OB, OC.

23. Ông An đã uống ở một cốc có dạng hình nón. Chiều cao phần rượu còn lại bằng nửa chiều cao rượu lúc đầu. Ông An đã uống bao nhiêu phần cốc rượu?



24. Một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, đường kính AB, $\widehat{ASB} = 60^0$.
Qua trung điểm I của SO, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt mặt xung quanh của hình nón ở C và D. Tính thể tích hình nón biết CD = 6cm.

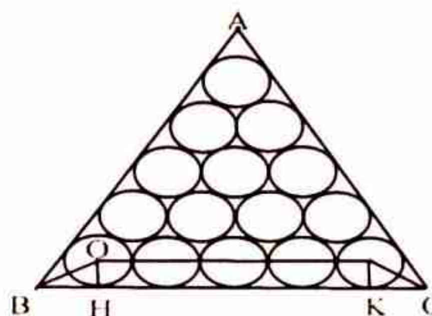
25. Một hình nón có chiều cao h. Hai đường sinh vuông góc với nhau chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là 1: 2. Tính thể tích hình nón.

26. Tam giác ABC có BC = a, chiều cao tương ứng bằng h. Tính thể tích hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh cạnh BC.

27. Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$, các tia phân giác của các góc C và D gặp nhau tại trung điểm của AB. Biết AB = 8cm, diện tích hình thang bằng $40cm^2$. Tính diện tích mặt xung quanh của hình nón cụt do cạnh CD tạo thành khi quay hình thang một vòng quanh trục AB.

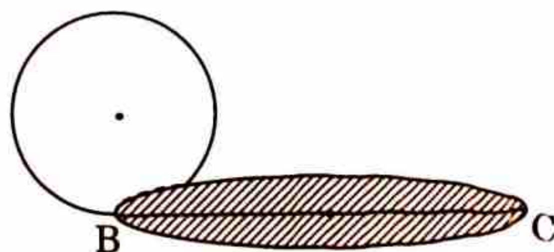
28. Tính số đo của cung AB của một hình quạt tâm O bán kính R để khi cuộn hình quạt lại, ta được một hình nón có thể tích lớn nhất.

29. Có 15 quả bi-a hình cầu đặt nằm trên mặt bàn, sao cho chúng được dồn khít trong một khung hình tam giác đều có chu vi bằng 858 mm. Tính bán kính của mỗi quả bi-a.

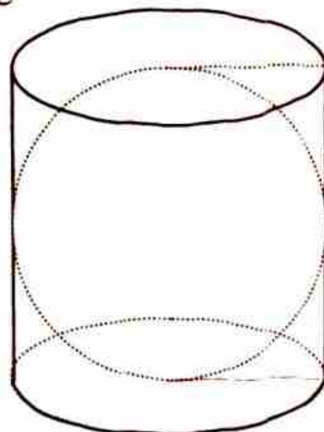


30. Một quả bóng hình cầu bán kính 13cm, nổi trên mặt hồ, đỉnh của quả bóng cao hơn mặt hồ 18cm. Tính độ dài của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ.

31. Một quả bóng hình cầu đặt trên mặt đất có bóng của nó như hình vẽ. Trong đó độ dài lớn nhất của bóng là BC = 1m. Biết một cột cao 1m lúc đó có bóng dài 2m. Tính bán kính của quả bóng.



32. Hình bên mô tả một hình cầu nội tiếp một hình trụ (tức là hình cầu được đặt khít vào trong hình trụ). Hãy chọn câu trả lời đúng:



a. Tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần hình trụ bằng:

A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{4}{5}$;

b. Tỉ số giữa thể tích hình cầu và thể tích hình trụ bằng:

A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{4}{5}$;

33. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

a. Chứng minh rằng tồn tại một hình cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình hộp chữ nhật.

b. Tính thể tích của hình cầu đó biết các kích thước của hình hộp chữ nhật là 6cm, 8cm, 24cm.

Hướng dẫn và đáp số

1. Gọi BB' là một đường sinh của hình trụ.

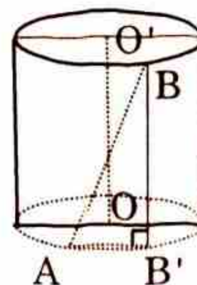
Ta có: OO' // BB' $\Rightarrow (\widehat{AB, OO'}) = (\widehat{AB, BB'}) = \widehat{ABB'} = \alpha$

a. Khi $\alpha = 30^0$: ΔB'AB là một nửa tam giác đều nên nếu AB = **x** thì:

$AB^2 = AB'^2 + B'B^2, AB = 2AB'$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 4R^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 16R^2 \Leftrightarrow x = \frac{4R}{\sqrt{3}}$.

Vậy $AB = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

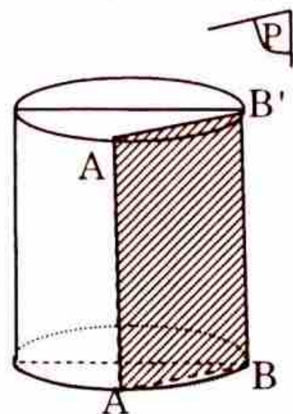


b. Do $AB^2 = AB'^2 + B'B^2 \Leftrightarrow AB^2 = AB'^2 + 4R^2$

Như vậy: AB lớn nhất $\Leftrightarrow$ AB' lớn nhất vì AB là một dây cung của đường tròn (O) nên lớn nhất khi AB'= 2R.

Khi đó ΔB'AB vuông cân tại B'. Nghĩa là: $\alpha = 45^0$.

2. Hình chữ nhật ABB'A' có 2 cạnh là hai đường sinh và 2 cạnh còn lại là hai dây cung của hai đáy.



Diện tích hình chữ nhật này là:

$S = AA'.AB = h.AB$.

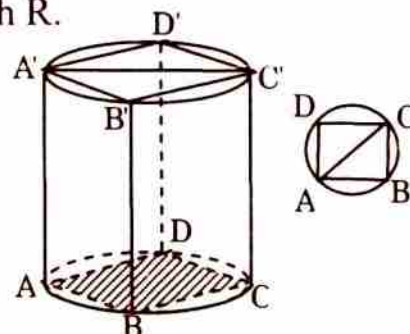
Do đó: S lớn nhất $\Leftrightarrow$ độ dài AB lớn nhất

$\Leftrightarrow$ AB là một đường kính của đáy.

Vậy: (P) là mặt phẳng chứa một đường sinh và một đường kính của đáy.

Khi đó: giá trị lớn nhất của S sẽ là: 2Rh.

3. a. Hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có:



- Đáy là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R.
- Cạnh bên là đường sinh hình trụ và bằng h.

Như vậy:

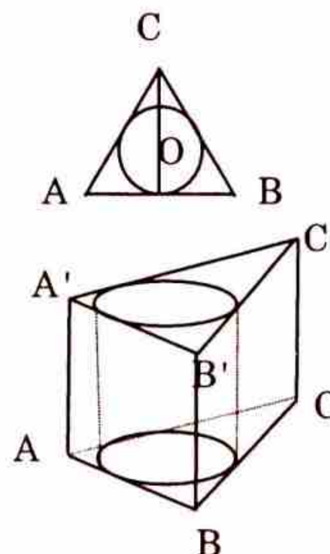
$2AB^2 = AC^2 = 4R^2 \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$

Suy ra: thể tích hình lăng trụ:

$V = Bh = (R\sqrt{2})^2.h = 2R^2h$ (đvtt)

b. Hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có:

- Đây là tam giác đều ngoại tiếp đường tròn bán kính R.
- Cạnh bên bằng đường sinh hình trụ và bằng h.



Như vậy: $CH = 3OH = \dfrac{3R}{2}$.

$AH^2 = AO^2 - OH^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$

$\Rightarrow AC^2 = AH^2 + CH^2 = \dfrac{3R^2}{4} + \dfrac{9R^2}{4} = \dfrac{12R^2}{4}$

$\Rightarrow AC = R\sqrt{3}$

Suy ra: diện tích toàn phần hình lăng trụ:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 3AB.AA' + 2\dfrac{AB.CH}{2}$

$= 3.R\sqrt{3}.h + R\sqrt{3}.\dfrac{3R}{2} = 3\sqrt{3}R\left(h + \dfrac{R}{2}\right)$(đvdt)

4. a. $\begin{cases} AO \perp OB' \\ AO \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AO \perp (OBO')$

$\Rightarrow$ Các tam giác OAO', OAB vuông tại O

$\begin{cases} BO' \perp AO \\ BO' \perp OO' \end{cases} \Rightarrow BO' \perp (OAO')$

$\Rightarrow$ Các tam giác O'BO, O'BA vuông tại O'

* Coi tứ diện OAO'B như là hình chóp có đỉnh A, đáy là tam giác OBO' thì thể tích tứ diện là:

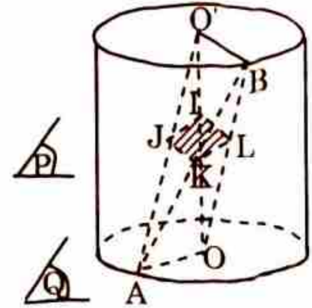
$$V = \frac{1}{3}S_{(OBO')}.AO = \frac{1}{3}.\frac{BO'.OO'}{2}.AO = \frac{1}{6}.R.R\sqrt{2}.R = \frac{R^3\sqrt{2}}{6}$$

* $\Delta OAO'$ vuông tại O:

$$O'A^2 = O'O^2 + OA^2 = 3R^2 \Rightarrow O'A = R\sqrt{3}$$

$\Delta O'BO$ vuông tại O':

$$OB^2 = OO'^2 + O'B^2 = 3R^2 \Rightarrow OB = R\sqrt{3}$$



Diện tích toàn phần hình tứ diện:

$$S_{tp} = S_{(OAO')} + S_{(OBA)} + S_{(O'BO)} + S_{(O'AB)}$$

$$= \frac{R^2\sqrt{2}}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{R^2\sqrt{2}}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = R^2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

b. Dễ thấy: $\begin{cases} OO' \perp (P) \\ OO' \perp (Q) \end{cases}$ (chứa đường tròn (O)). Nên (P)//(Q) (suy ra từ định nghĩa đường thẳng vuông góc mặt phẳng).

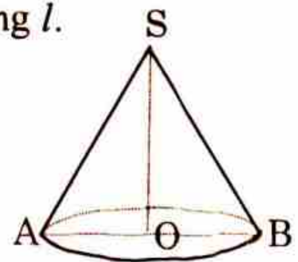
Gọi I, K, L lần lượt là giao điểm của (P), các đường thẳng O'A, AB và OB thì: $\begin{cases} (P) // (Q) \\ (P) \cap (O'OA) = IJ \Rightarrow IJ // OA \Rightarrow I \text{ là trung điểm của OA.} \\ (Q) \cap (O'OA) = OA \end{cases}$

Tương tự: K, L lần lượt là trung điểm của AB, OB.Để ý rằng: IJ, KL // OA $\Rightarrow$ IJ // KL; $IJ = KL = \frac{OA}{2}$. Ngoài ra: $\begin{cases} IJ // OA \\ IL // O'B \\ OA \perp O'B \end{cases} \Rightarrow IJ \perp IL$

Như vậy: tứ giác IJKL là hình vuông.

Diện tích hình vuông này sẽ là: $S = IJ.IL = \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$

5. Theo đề bài, tam giác SAB là tam giác đều có cạnh bằng *l*.



Do đó: bán kính đáy hình nón: $R = OA = \frac{SA}{2} = \frac{\ell}{2}$

Diện tích toàn phần hình nón:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi R\ell + \pi R^2 = \frac{\pi\ell^2}{2} + \frac{\pi\ell^2}{4} = \frac{3\pi\ell^2}{4}$$

6. Giả sử ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH của tam giác. Ta có:

* Thể tích hình nón sinh ra khi ΔABC quay quanh trục AC:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi AB^2.AC.$$

Thể tích hình nón sinh ra khi ΔABC quay quanh trục AB: $V_2 = \frac{1}{3}\pi AC^2.AB$.

Thể tích hình sinh ra khi ΔABC quay quanh trục BC gồm thể tích hai hình nón có bán kính đáy bằng AH; chiều cao là BH, CH:

$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi AH^2.CH = \frac{1}{3}\pi AH^2.BC.$$

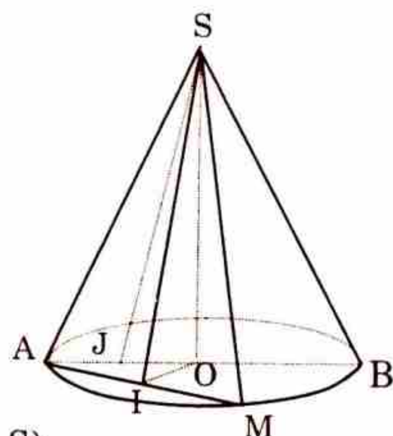
Như vậy: $\frac{1}{V^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^4.BC^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^2 AH^2.BC^2} = \frac{9}{\pi^2 AH^2 AB^2 AC^2}$

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2.AB^4.AC^2} + \frac{9}{\pi^2 AC^4.AB^2}$$

$$= \frac{9}{\pi^2 AB^2 AC^2}\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right) = \frac{9}{\pi^2 AH^2.AB^2.AC^2}$$

(Do các hệ thức trong tam giác vuông: $AH.BC = AB.AC$; $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$).

Vậy: $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$



7. Xét ΔMAB nội tiếp đường tròn đường kính AB với AB là đường kính đáy hình nón. Gọi I là trung điểm dây cung MA. ΔIAO vuông tại I $\Rightarrow OA > OI$.

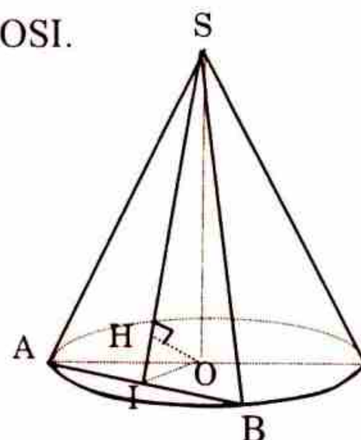
Lấy điểm J trên đoạn OA để OI = OJ.

Ta có: $\Delta OIS = \Delta OJS$

$\Rightarrow \widehat{OSI} = \widehat{OSJ} \Rightarrow \widehat{OSI} < \widehat{OSA}$

$\Rightarrow \widehat{MSA} = \widehat{BSA}$ (các tam giác SAB, SAM cân tại S)

Như vậy: góc lớn nhất tạo bởi hai đường sinh hình nón là $\widehat{ASB}$ trong đó AB là đường kính của đáy.



8. Gọi I là trung điểm của AB và OH là đường cao ΔOSI.

$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp SI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Do đó: $OH = \frac{R\sqrt{3}}{4}$

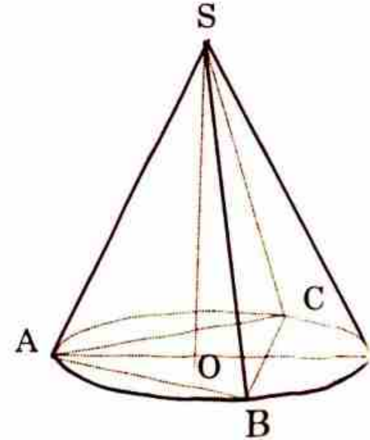
* ΔOSI vuông tại I: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{3R^2} - \frac{4}{3R^2} = \frac{4}{R^2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$.

* IAO vuông tại O: $IA^2 = AO^2 - OI^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow IA = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Như vậy: $AB = R\sqrt{3}$.

9. Gọi R, h lần lượt là bán kính đáy, chiều cao hình nón, a là cạnh đáy hình chóp tam giác đều ABC. Đường cao hình chóp đều cũng bằng h.



* Trong tam giác vuông HAB:

$$AH = \frac{3}{2}AO = \frac{3R}{2}; AB = 2BH$$

Do đó: $a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9R^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = 3R^2$

Theo đề bài: thể tích hình chóp là V nên

$$V = \frac{1}{3}S_{(ABC)}.SO = \frac{1}{6}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra: thể tích hình nón là:

$$V_n = \frac{1}{3}\pi R^2h = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{3}.h = \frac{\pi}{9}.\frac{12V}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi V}{3\sqrt{3}} \text{(đvtt)}$$

10. a. Ta có, góc của 2 đường sinh hình nón lớn nhất khi mặt phẳng chứa 2 đường sinh đi qua trục $\Leftrightarrow 2R = l; h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

ΔABC đều ngoại tiếp hình tròn đáy hình nón nên các tiếp điểm M, N P lần lượt là trung điểm AB, BC, CA.

ΔMOA vuông tại M, MO = R, OA = 2MO = 2R nên

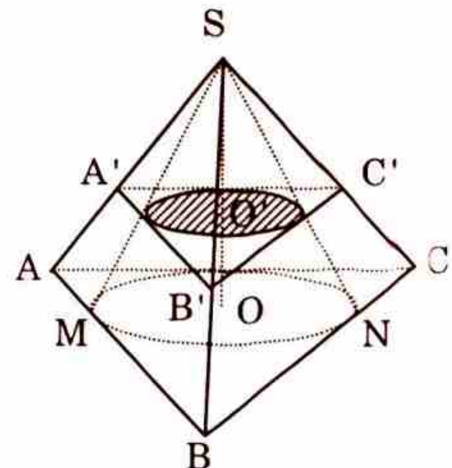
$AM = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2R\sqrt{3}$.

Do đó: thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}S_{(ABC)}.SO = \frac{1}{3}\frac{(2R\sqrt{3})^2}{4}.\sqrt{3}.R\sqrt{3} = 3R^3$.

Diện tích toàn phần hình chóp:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \frac{1}{2}.3AB.SM + \frac{AB^2\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2}.2R\sqrt{3}.2R + \frac{(2R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 9R^2\sqrt{3}$$

b. Nếu mp (P) cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' thì: ΔA'B'C'~ΔABC theo tỉ số đồng dạng: $k = \frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO}$.



Do đó: $\frac{V_{(SA'B'C')}}{V_{(SABC)}} = \frac{S_{(A'B'C')}}{S_{(ABC)}}.\frac{SO'}{SO} = k^2.k = k^3$

Như vậy: $\frac{1}{2} = k^3 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

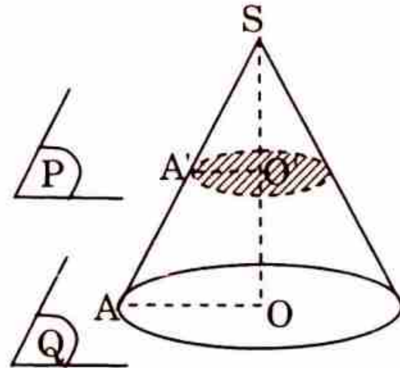
Gọi r là bán kính hình tròn cần tìm, ta có:

$\frac{r}{R} = k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow r = R\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Diện tích hình tròn phải tìm: $S = \pi r^2 = \pi.\left(R\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{\pi.R^2}{\sqrt[3]{4}}$ (đvdt)

11. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đáy hình nón và (SOA) là mặt phẳng chứa đường cao và một đường sinh: O' là trung điểm SO.

$\begin{cases}(P)//(Q)\\(SOA)\cap(Q) = OA \quad \Rightarrow OA // OA'\\(SOA)\cap(P) = O'A'\end{cases}$



$\Rightarrow$ O'A' là đường trung bình của ΔSOA.

Mặt phẳng (P) chia hình nón lớn thành 2 phần:

- Một là hình nón nhỏ đỉnh S đáy là hình tròn có bán kính $O'A' = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$; chiều cao $SO' = \frac{SO}{2} = \frac{h}{2}$

- Một là hình chóp cụt có các bán kính đáy là R và $\frac{R}{2}$; chiều cao $\frac{h}{2}$.

Do đó: thể tích hình nón nhỏ:

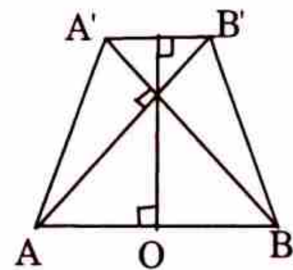
$V_1 = \frac{1}{3}\pi O'A'^2.SO' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.\frac{h}{2} = \frac{\pi R^2 h}{24}$ (đvtt)

Thể tích hình nón cụt:

$V_2 = \frac{\pi.OO'}{3}\left(OA^2 + O'A^2 + OA.O'A'\right) = \frac{\pi}{3}.\frac{h}{2}\left(R^2 + \frac{R^2}{4} + R.\frac{R}{2}\right) = \frac{7\pi R^2 h}{24}$ (đvtt)

12. Gọi AA', BB' là 2 đường sinh của hình nón cụt chứa trong (P).

Tứ giác ABB'A' là hình thang cân có hai đường chéo cắt nhau và vuông góc tại I. Đặt AB = 2x.



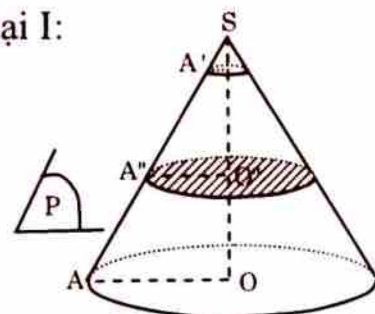
ΔIAB vuông cân tại I nên:

$OI = \frac{AB}{2} = x; AI = x\sqrt{2}$

$\Delta IA'B'$ vuông cân tại I nên:

$O'I = \frac{A'B'}{2} = \frac{x}{2}; A'I = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

Theo đề bài: $x + \frac{x}{2} = h \Leftrightarrow x = \frac{2h}{3}$; $\Delta IAA'$ vuông tại I:



$AA'^2 = AI^2 + IA'^2 = \left(\frac{2h\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{h\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{10h^2}{9}$

$\Rightarrow AA' = \frac{h\sqrt{10}}{3}$.

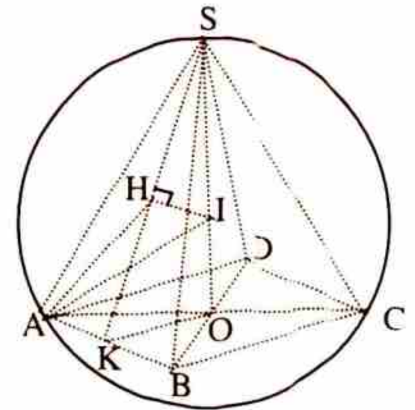
Do đó: thể tích hình nón cụt:

$$V = \frac{\pi OO'}{3}\left(OA^2 + O'A'^2 + OA.O'A'\right) = \frac{\pi}{3}.h\left(\frac{4h^2}{9} + \frac{h^2}{9} + \frac{2h^2}{9}\right) = \frac{7\pi h^2}{27} \text{ (dvtt).}$$

Diện tích xung quanh hình chóp cụt:

$$S_{xq} = \pi\left(OA + O'A'\right)AA' = \pi\left(\frac{2h}{3} + \frac{h}{3}\right).\frac{h\sqrt{10}}{3} = \frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3} \text{ (đvdt)}$$

13. Gọi x là bán kính đường tròn cần tìm. Xét hình nón đỉnh S sinh ra hình nón cụt. Lí luận như ở bài toán trên, ta có thể suy ra như sau:
Nếu gọi V là thể tích hình nón đáy tâm O, V_1 là thể tích hình nón đáy tâm O', V_2 là thể tích hình nón đáy tâm O''



Thì: $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi.O'A^2.SO'}{\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO} = \dfrac{r^3}{R^3}$.

Tương tự: $\dfrac{V_2}{V} = \dfrac{x^3}{R^3}$.

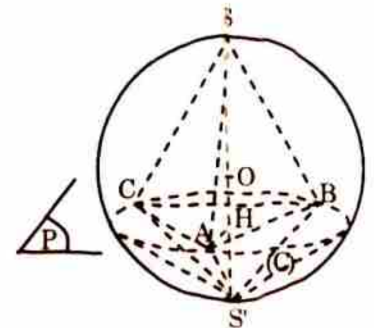
Do đó: $\dfrac{V - V_1}{V} = \dfrac{R^3 - r^3}{R^3} \Rightarrow V - V_1 = \dfrac{R^3 - r^3}{R^3}V$

$\dfrac{V - V_2}{V} = \dfrac{R^3 - x^3}{R^3} \Rightarrow V - V_2 = \dfrac{R^3 - x^3}{R^3}V$.

Theo đề bài: $V - V_1 = 2\left(V - V_2\right) \Leftrightarrow \dfrac{R^3 - r^3}{R^3}.V = 2.\dfrac{R^3 + x^3}{R^3}.V \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{R^3 + r^3}{R^3}$.

Vậy: $x = \dfrac{\sqrt[3]{R^3 + r^3}}{R}$

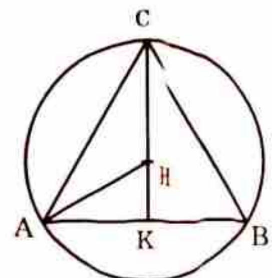
14. a. Để ý rằng A nhìn đường kính SS' của mặt cầu nên ΔASS' vuông tại A.
Ngoài ra: SS' $\perp$ (P) $\Rightarrow$ SS' $\perp$ AH.



Trong ΔASS': $HS = \dfrac{4R}{3}; HS' = \dfrac{2R}{3}$.

Và $SA^2 = SH.SS' = \dfrac{4R}{3}.2R = \dfrac{8R^2}{3} \Rightarrow SA = \dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$

ΔABC đều nội tiếp đường tròn đường kính $\dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$ thì nếu CK là đường cao, ta có:



$AK^2 = AH^2 - HK^2 = AH^2 - \dfrac{AH^2}{4} = \dfrac{8R^2}{9} - \dfrac{2R^2}{9} = \dfrac{6R^2}{9}$

Do đó: $AK = \dfrac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AB = \dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$.

Như vậy: có thể thấy được: $SA = SB = SC = AB = BC = CA = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Suy ra: tứ diện SABC đều. Thể tích tứ diện này:

$$V = \frac{1}{3}S_{(ABC)}.SH = \frac{1}{3}\left(\frac{2R\sqrt{6}}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{4R}{3} = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27} \text{ (đvtt)}$$

b. Cũng trong $\Delta ASS'$: $S'A^2 = S'H.S'C = \frac{2R}{3}.2R = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow S'A = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Do đó: diện tích xung quanh hình nón đỉnh S'

$$S_{xq} = \pi.AH.S'A = \pi.\frac{2R\sqrt{2}}{3}.\frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi R^2\sqrt{6}}{9} \text{ (đvdt)}$$

Trong tam giác S'AB với: $S'A = S'B = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$; $AB = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ thì

$$AB^2 = \frac{24R^2}{9} = \frac{12R^2}{9} + \frac{12R^2}{9} = S'A^2 + S'B^2$$

$\Delta S'AB$ vuông cân tại S'.

Hoàn toàn tương tự: $\Delta S'BC$, $\Delta S'CA$ vuông cân tại S. Suy ra: các đường sinh S'A, S'B, S'C của hình nón đỉnh S' đôi một vuông góc nhau.

15.a. Mặt cầu (S) chứa đường tròn (C) nên tâm I của (S) nằm trên đường thẳng Ot vuông góc với (P).

$$\begin{cases} Ot \perp (P) \\ d \perp (P) \end{cases} \Rightarrow d // Ot, Ot \subset (BST)$$

Ngoài ra: $IT = IA \Rightarrow$ I nằm trên trung trực đoạn AI.

Vậy: trong mặt phẳng (SBT), I là giao điểm của các đường trung trực của AB và AT. Nói cách khác: I là trung tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBAT.

b. Kẻ IH vuông góc d tại điểm H.

Đặt OI = x. Trong ΔOAI vuông tại O: $AI^2 = AO^2 + OI^2 = x^2 + R^2$

Trong hình thang vuông IOST và tam giác vuông HIT:

$$IT^2 = IH^2 + HT^2 = OS^2 + HT^2 = 4R^2 + (2R - x)^2 = x^2 - 4Rx + 8R^2$$

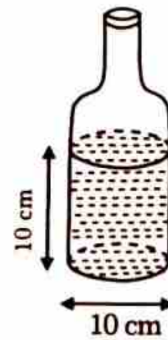
Nhưng IA, IT đều là bán kính mặt cầu (S) nên:

$IA = IT \Leftrightarrow x^2 + R^2 = x^2 - 4Rx + 8R^2 \Leftrightarrow 4Rx = 7R^2 \Leftrightarrow x = \frac{7R}{4}$. Vậy $OI = \frac{7R}{4}$.

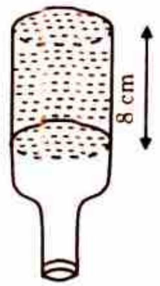
Theo trên: $AI^2 = x^2 + R^2 = \frac{49R^2}{16} + R^2 = \frac{65R^2}{16} \Rightarrow AI = \frac{R\sqrt{65}}{4}$

Thể tích hình cầu (S) là: $V = \frac{4}{3}\pi AI^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R\sqrt{65}}{4}\right)^3 = \frac{65\pi R^3\sqrt{65}}{48.}$ (đvtt)

16. Thể tích chai bằng tổng các thể tích của khối nước hình trụ ở hình a và phần chia không chứa nước ở hình b.



A)



B)

$V = \pi.5^2.10 + \pi.5^2.8$

$= 25\pi(10 + 8)$

$= 450\pi(cm^3)$

$= 1413(cm^3)$.

17. Thể tích của các khối chì, sắt nhôm theo thứ tự bằng:

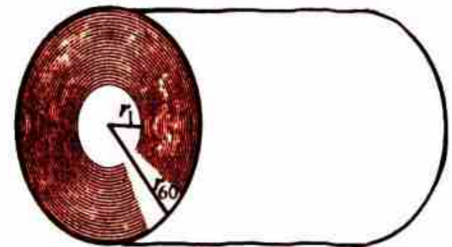
$$V_1 = \frac{2}{11,3}(dm^3); V_2 = \frac{2}{7,8}(dm^3); V_3 = \frac{2}{2,7}(dm^3)$$

Chiều cao của các khối chì, sắt, nhôm theo thứ tự bằng:

$$h_1 = \frac{2}{11,3.\pi.0,5^2} = 0,23dm = 2,3cm.$$

$$h_2 = \frac{2}{7,8.\pi.0,5^2} = 0,33dm = 3,3cm.$$

$$h_3 = \frac{2}{2,7.\pi.0,5^2} = 0,94dm = 9,4cm.$$



18. Gọi ℓ là chiều dài của bằng giấy, chiều dài đó bằng tổng độ dài của 60 đường tròn có bán kính $r_1, r_2, \ldots, r_{60}$, trong đó $r_1 = 1cm; r_{60} = 3cm$.

Ta có: $\ell = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{60})$

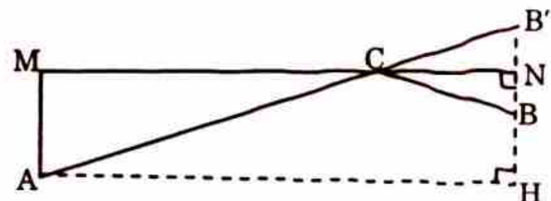
Gọi d là độ dày của tờ giấy thì $r_2 = r_1 + d$, $r_3 = r_2 + d, \ldots, r_{60} = r_{59} + d.s$

Do đó $r_1 + r_{60} = r_2 + r_{59} = r_3 + r_{58} = \ldots = r_{30} + r_{31} = 4cm$

Vậy $\ell = 2\pi.30.4 = 240\pi(cm) \approx 7,5m$.

19. Hãy chứng minh rằng trong các hình chữ nhật nội tiếp của đường tròn cho trước, hình vuông có diện tích lớn nhất. Từ đó nếu đáy của khúc gỗ là một hình vuông có đường chéo bằng d thì khúc gỗ có thể tích lớn nhất.

20. Giả thiết rằng lọ thủy tinh làm "bằng bìa", ta trải mặt xung quanh của lọ thành một hình chữ nhật có chiều dài bằng độ dài của đường tròn miệng lọ (48cm). Gọi AM , BN là các đường vuông góc kẻ từ A, B đến miệng lọ thì MN = 24cm.



Chú kiến muốn tới B ở phía trong lọ phải vượt qua miệng lọ, tức là phải đi từ A tới MN, rồi tới B. Như vậy, chú phải "giải" bìa toán: "tìm điểm C trên MN sao cho AC + CB ngắn nhất.

Dễ dàng tính được AC + CB = AC +CB' = AB' = 25cm.

21. Gọi S là diện tích toàn phần, r là bán kính của đáy, h là đường cao của hình trụ. Ta có: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\left(rh + r^2\right)$

S nhỏ nhất khi và chỉ khi $rh + r^2$ nhỏ nhất.

Gọi V là thể tích của hình trụ (V là hằng số),

ta có $V = \pi r^2 h$ nên

$$rh + r^2 = \frac{V}{\pi r} + r^2 = \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} + r^2$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ba số dương $\frac{V}{2\pi r}; \frac{V}{2\pi r}; r^2$ có tích không đổi (bằng $\frac{V^2}{4\pi^2}$) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi ba số ấy bằng nhau, tức là:

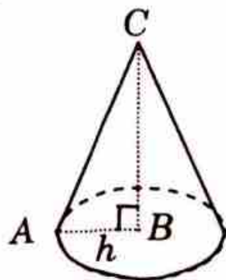
$$\frac{V}{2\pi r} = r^2 \Leftrightarrow \frac{rh}{2} = r^2 \Leftrightarrow h = 2r.$$

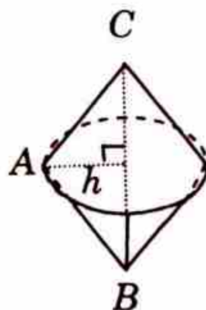
22. Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OB:

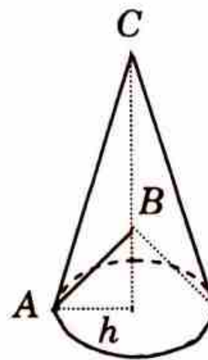
$$\frac{1}{3}\pi OC^2.OB = 800\pi \quad (1)$$

Thể tích hình nón khi quay tam giác quanh OC:

$$\frac{1}{3}\pi OB^2.OC = 1920\pi \quad (2).$$



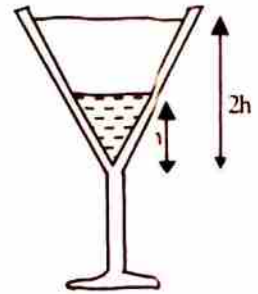




Lấy (1) chia cho (2) được $\frac{OC}{OB} = \frac{5}{12}$

Thay $OB = \frac{12}{5}OC$ vào (1) được $\frac{1}{3}\pi.OC^2.\frac{12}{5}OC = 800\pi.$

Suy ra $OC^3 = 1000$ nên $OC = 10$.

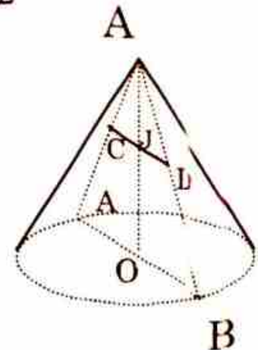


Do đó $OB = \frac{12}{5}.10 = 24$.

23. Đáp số : $\frac{7}{8}$

24. Đáp số $72\pi\sqrt{3}(cm^3)$.

25. Gọi SA, SB là hai đường sinh vuông góc. Do SA, SB chia mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ số diện tích là 1: 2 nên A, B, chia đường tròn (O) thành hai phần có tỉ số độ dài là 1:2



Do đó $\overset{\frown}{AB} = 120^0$. Đặt OA = OB = r.

Xét ΔAOB, ta có $AB = 2r\sin 60^0 = r\sqrt{3}$

Xét ΔSAB vuông cân, ta có $AB = SA\sqrt{2}$.

Từ đó $SA^2 = \frac{3}{2}r^2$

ΔSOA vuông nên $h^2 = SA^2 - r^2 = \frac{r^2}{2}$ suy ra $r^2 = 2h^2$.

Từ đó $V = \frac{2}{3}\pi h^3$ (đvtt)

26. Giả sử $\widehat{B} \geq \widehat{C}$. Nếu $\widehat{B} = 90^0$ thì hình tạo thành là hình nón có bán kính đáy bằng h, chiều cao bằng a. (h. a)

Nếu $\widehat{B} < 90^0$ thì thể tích hình tạo thành là tổng thể tích hai hình nón(h. b).

Nếu $\widehat{B} > 90^0$ thì thể tích hình tạo thành là hiệu thể tích hai hình nón.

27. Đáp số: $100\pi(cm^2)$.

28. Gọi r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón, h là chiều cao của hình nón.

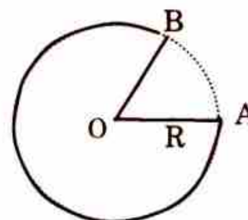
Ta có $V = \frac{1}{3}\pi hr^2$ nên V lớn nhất khi và chỉ khi r^2h lớn nhất.

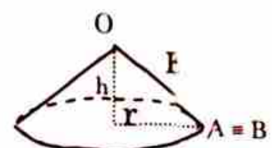
Do $h^2 = R^2 - r^2$ nên ta biến đổi:

V lớn nhất $\Leftrightarrow r^4h^2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow r^4(R^2 - r^2)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow r^4(2R^2 - 2r^2)$ lớn nhất.





Theo bất đẳng thức Côsi, ba số dương $r^2, r^2, 2R^2 - 2r^2$ có tổng không đổi (bằng $2R^2$) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau, tức là:

$$r^2 = 2R^2 - 2r^2 \Leftrightarrow 3r^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Độ dài cung lớn AB bằng $2\pi r$.

Độ dài đường tròn (O; R) bằng $2\pi R$.

Số đo của cung lớn AB bằng: $\frac{2\pi r}{2\pi R}.360^0 = \frac{\sqrt{6}}{3}.360^0 = 294^0$

29. Gọi r là bán kính của mỗi quả bi-a.

Cạnh của tam giác đều ABC bằng 858 : 3 = 286 (mm).

Xét ΔOBH vuông tại H, ta có : $BH = OH \tan 60^0 = r\sqrt{3}$

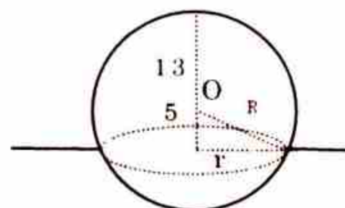
Ta có:

$BC = BH + HK + KC = r\sqrt{3} + 8r + r\sqrt{3} = 2(4 + \sqrt{3})r.$

Do đó: $r = \frac{286}{2(4+\sqrt{3})} = \frac{143(4-\sqrt{3})}{13} = 11\left(4-\sqrt{3}\right) \approx 25(mm)$

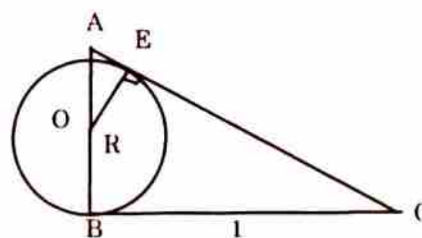
Bán kính của mỗi quả bi-a bằng 25mm.

30. Gọi r là bán kính của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng và mặt hồ, ta tính được r = 12 cm.



Đáp số: $24\pi(cm)$.

31. Gọi R là bán kính của quả bóng. Trên hình bên, tia sáng tiếp xúc với đường tròn (O) tại E, A là giao điểm của BO và CE.



Ta tính được: $AB = 0,5m; AC = \frac{\sqrt{5}}{2}m.$

$\Delta AEO \sim \Delta ABC$ (g.g) nên $\frac{OA}{CA} = \frac{OE}{BC}.$

Từ đó tính được $R = \sqrt{5} - 2(m)$

32. a, b) Câu trả lời B là đúng.

33. a) Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp chữ nhật cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường chéo.

b. Đáp số: $\frac{8788}{3}\pi\left(cm^3\right)$.

6. Bài tập tổng hợp

1. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) lại B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B, C). Từ M kẻ $MH \perp BC$. $MK \perp CA$, $MI \perp AB$. Chứng minh :

1. Tứ giác ABOC nội tiếp.

2. $\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$.

3. $\Delta MIH \sim \Delta MHK$.

4. $MI.MK = MH^2$.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1. Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.

2. E, F nằm trên đường tròn (O).

3. Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.

4. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

3. BC là một dây cung của đường tròn (O; R) (BC = 2R). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE. CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.

2. Gọi A' là trung điểm của BC. Chứng minh AH = 2OA'.

3. Gọi Ai là trung điểm của EF. Chứng minh $R.AA_1 = AA'. OA'$.

4. chứng minh $R(EF + FD + DE) = 2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.

4. Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R) , tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính AO.

1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.

2. Giả sử $\hat{B} > \hat{C}$, chứng minh $\widehat{OAH} = \hat{B} - \hat{C}$

3. Cho $\widehat{BAC} = 60^0$ và $\widehat{OAH} = 20^0$. Tính:

a. $\hat{B}$ và $\hat{C}$ của tam giác ABC.

b. Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R.

5. Cho tam giác ABC, trực tâm H. Kẻ các đường thẳng AA', BB', CC' sao cho các tia phân giác của các góc A'AH, B'BH, C'CH song song với nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' gặp nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

6. Cho tam giác có độ dài các cạnh bằng a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 \le c^2$. Gọi p, r, h_c lần lượt là nửa chu vi, độ dài bán kính đường tròn nội tiếp, độ dài đường cao thuộc cạnh c của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{r}{h_c} > \frac{2}{5}$.

7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn. Gọi M là điểm di động trên cung BC không chứa điểm A. Xác định vị trí của điểm M sao cho:

$$2008\ MB + 2009\ MC$$

đạt giá trị lớn nhất.

8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R, bán kính OC vuông góc với AB, M là một điểm trên cung BC, AM cắt OC ở N.

1. Chứng minh rằng tứ giác OBMN nội tiếp được. Suy ra rằng: AM.MN không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung BC.
2. Tính góc MAB để cho ΔMNB cân tại M.
3. Trong trường hợp MN = MB, tính theo R các đoạn ON, CN và thể tích của hình nón gây ra bởi ΔANC khi tam giác này quay quanh OA. Cho biết $\tan 22^0 30' = \sqrt{2} - 1$.

9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn (A) tâm A, bán kính AH.

1. Chứng minh DE là một đường kính của đường tròn (A).
2. Chứng minh rằng: $BD.CE = \frac{DE^2}{4}$
3. Cho BC = 2a và $\widehat{ABC} = 60^0$, tính theo a các đoạn AB, AC, AH, BH và CH.
4. Với giả thiết ở câu (3), tính thể tích của hình gây ra bởi hình thang BCED quay quanh CE.

10. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, Ax và By là các tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại A và B. Trên Ax lấy một điểm M. Kẻ tiếp tuyến MP với (O), gặp By tại N.

1. Chứng minh rằng MON và APB là hai tam giác đồng dạng.
2. Chứng minh hệ thức: $AM.BN = R^2$.
3. Cho $BN = \frac{R}{2}$, tính tỉ số diện tích của hai tam giác MNO và APB.
4. Với giả thiết của câu (3), tính thể tích của hình sinh ra bởi phần hình thang AMNB nằm ngoài (O) khi ta cho hình vẽ quay quanh AB.

11. Cho tam giác ABC nội tiếp đều đường tròn tâm O bán kính R. Kẻ đường kính ED song song với BC, E nằm trên cung AB, cắt AB và AC theo thứ tự tại M và N.

1. Tính theo R độ dài đoạn thẳng MN và diện tích tam giác AON.
2. Tính diện tích hình viên phân ADC.
3. Đường kính ED chia hình viên phân ADC ra làm hai phần. Tính tỉ số diện tích của phần lớn đối với phần nhỏ. Tỉ số này nằm giữa hai số nguyên nào?
4. Tính thể tích của hình gây ra bởi "tam giác cong" AND khi cho hình vẽ quay quanh ED.

12. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Kẻ hai bán kính OC và OD sao cho $\widehat{AOC} = 60^0$ và $\widehat{BOD} = 30^0$.

1. Tính độ dài của dây CD.
2. Các tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại C và D cắt nhau ở M. Tính diện tích S của phần tứ giác OCMD nằm ngoài nửa đường tròn (O).
3. Cho hình vẽ quay quanh AB. Tính thể tích V của hình gây ra bởi ΔOCD.

13. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên tia đối của tia AB, lấy đoạn BP = R. Kẻ tiếp tuyến PM với nửa đường tròn (O) tại M. Hạ MH vuông góc với OP.

1. Tính PM, OH, MH theo R.
2. Tính diện tích S phần tam giác OMP nằm ngoài nửa đường tròn (O).
3. Cho hình vẽ quay quanh OP.

a. Tính thể tích V của hình gây ra bởi tam giác OMP.

b. Tính thể tích V' của hình gây ra bởi phần tam giác OMP nằm ngoài nửa đường tròn (O).

14. Cho đường tròn (O). đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung CD $\perp$ AB ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM, K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$.
2. AM là tia phân giác của $\widehat{CMD}$.
3. Tứ giác OHCI nội tiếp.
4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

15. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O; R). Biết $\widehat{BAC} = 60^0$.

1. Tính số đo góc BOC và độ dài BC theo R.
2. Vẽ đường kính CD của (O; R); gọi H là giao điểm của ba đường cao của tam giác ABC. Chứng minh BD // AH và AD // BH.
3. Tính AH theo R.

16. Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt BC tại I cắt đường tròn tại M.

1. Chứng minh $OM \perp BC$.
2. Chứng minh $MC^2 = MI.MA$.
3. Kẻ đường kính MN, các tia phân giác của góc B và C cắt đường thẳng AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C, B, Q cùng thuộc một đường tròn

17. Cho tam giác ABC cân (AB = AC), BC = 6 cm, chiều cao AH = 4 cm, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của đường tròn (O).
2. Kẻ đường kính CC', tứ giác CAC'A' là hình gì? Tại sao?
3. Kẻ $AK \perp CC'$ tứ giác AKHC là hình gì? Tại sao?
4. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác ABC.

18. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{DOE} = 60^0$.

1. Chứng minh tích BD. CE không đổi.
2. Chứng minh hai tam giác BOD; OED đồng dạng. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giac của góc BDE.
3. Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn luôn tiếp xúc với DE.

19. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD), có AB = 2a, CD = 4a, $\widehat{C} = 60^0$.

1. Tính độ dài các cạnh bên, chiều cao AH và diện tích hình thang.
2. Tính độ dài các đường chéo AC và BD.
3. Cho hình vẽ quay quanh CD. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình gây ra bởi tam giác OCD, O là giao điểm của AC và BD.

20. Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính vuông góc AB, CD. Trên bán kính AO, lấy đoạn $AE = \dfrac{2AO}{3}$; đường thẳng CE cắt (O) ở M.

1. Tính CE theo R.
2. Chứng minh rằng hai tam giác MCD và OCE đồng dạng. Tính các cạnh và đường cao MH của tam giác MCD.
3. Chứng tỏ tứ giác MEOD nội tiếp được. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác MEOD. Tính diện tích tứ giác MEOD.
4. Tính thể tích của hình gây ra khi tam giác ECD quay quanh CD.

21. Cho tam giác ABC cân tại A. Có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C lần lượt cắt AC, AB tại D và E. Chứng minh:

1. $BD^2 = AD.CD$.
2. Tứ giác BCDE nội tiếp.
3. BC song song với DE.

22. Cho đường tròn (O) đường kính AB. điểm M thuộc đường tròn . Vẽ điểm N đối xứng với A qua M. BN cắt (O) lại C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

1. Chứng minh tứ giác MNCE nội tiếp .
2. Chứng minh $NE \perp AB$.
3. Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh FA là tiếp tuyến của (O).
4. Chứng minh FN là tiếp tuyến của đường tròn (B; BA).

23. AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R (B, C là tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc AB tại H. cắt (O) tại E và cắt OA tại D.

1. Chứng minh CO = CD.
2. Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.
3. Gọi M là trung điểm của CE. BM cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.
4. Tiếp tuyến tại E với (O) cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm O, M, K thẳng hàng.

24. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E. Tia CE cắt (O) tại F.

1. Chứng minh BC // AE.
2. Chứng minh ABCE là hình bình hành.
3. Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của BC và OI. So sánh $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BGO}$.

25. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và dây CD vuông góc với AB tại I.

1. Tính tổng $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$. Có nhận xét gì?
2. CMR trung tuyến IM của tam giác IAD vuông góc với BC.
3. Cho $OI = \frac{R}{3}$. Tính:

a. Chu vi tứ giác ACBD.

b. Diện tích xung quanh và thể tích của hình gây ra do tam giác ABC quay quanh AB.

26. Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CH. Kẻ HM và HN theo thứ tự vuông góc với AC và BC.

1. Cho HA = a, HB = b, tính CH, MN, AC và BC theo a và b.
2. Chứng minh các tam giác: ABC, AHM, HBN, NMC đồng dạng. Lập tỉ số diện tích của 3 tam giác sau đối với diện tích ΔABC.
3. Chứng tỏ diện tích NMC là trung bình nhân giữa diện tích của các tam giác AHM và HBN.
4. Cho hình vẽ quay quanh AB, tính thể tích V của hình gây ra bởi ΔHMN

27. Cho đoạn thẳng AB = a. Vẽ hai bên của AB, dựng tam giác đều ABC và tam giác cân BAD (BA = BD) có $\widehat{ABD} = 30^0$.

1. Tính diện tích tứ giác ACBD theo a.
2. Từ D, kẻ đường song song với AB gặp CB kéo dài tại E.
   Tính BE, CE và diện tích ΔACE theo a.
3. Tam giác ACE và tứ giác ACBD tương đương nhau. Có thể thấy được điều đó mà không cần phải tính diện tích của chúng hay không?
4. Cho hình vẽ quay quanh AB. Tính thể tích V của hình gây ra bởi ΔABD.

28. Trong đường tròn tâm O bán kính R nội tiếp tam giác vuông ABC sao cho AB = 2R và AC = R.

1. Tính các góc A và B của ΔABC.
2. Trên tia đối của tia AB, lấy đoạn AD = R. Chứng minh rằng DC tiếp xúc với đường tròn (O) tại C. Chứng tỏ OC vuông góc với đường phân giác AM của góc BAC.
3. Cho hình vẽ quay quanh AB. Tính thể tích V của hình gây ra bởi tam giác BOC.

29. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Nửa đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại P và AC tại Q.

1. Tứ giá BPQC là hình gì?
2. Tính theo a, chu vi và diện tích của tứ giác BPQC.
3. Gọi V và V' là thể tích theo thứ tự của các hình gây ra bởi tứ giác BPQC và nửa hình tròn khi cho hình vẽ quay quanh BC. Tính tỉ số $\frac{V}{V'}$.

30. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Trên tia đối của tia BA, lấy đoạn BC = 2R. Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) và dây DE vuông góc với AC tại H.

1. Tính DH, CD, CH, OH theo R.
2. a. Chứng tỏ CA.CB = CH.CO.

   b. Hệ thức này có còn đúng hay không trong trường hợp tổng quát: C là điểm tùy ý nằm trên tia đối của tia BA?Chứng minh điều khẳng định đó.
3. Cho hình vẽ quay quanh AC. Tính:

   a. Diện tích xung quanh của hình gây ra bởi ΔCDH

   b. Thể tích của hình gây ra bởi ΔCDO.

31. Cho nửa đường tròn (O) tâm O đường kính AB = 2R. Dựng các nửa đường (O'), và (O") nằm trong nửa đường tròn (O), đường kính AO và OB. Gọi I là tâm đường tròn tiếp xúc với cả ba nửa đường tròn đã cho.

1. Chứng tỏ OI vuông góc với AB.
2. Tính bán kính r của (I) theo R.

3. Tính diện tích S của phần mặt phẳng (Σ) gồm nửa đường tròn (O), các nửa đường tròn (O'), (O") và đường tròn (I).

4. Cho hình vẽ quay quanh AB. Tính thể tích V của hình gây ra bởi mặt phẳng (Σ) đã nói ở câu (3).

32. Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính vuông góc AB, CD, tiếp tuyến tại điểm M nằm trên cung AC, gặp tia DC tại E.

1. Chứng minh rằng: $\widehat{MEO} = 2.\widehat{MBA}$.

2. Giả sử $\widehat{MBA} = 15^0$.

a. Tính ME, MH, HD với H là hình chiếu của M xuống CD, theo R.

b. Cho hình vẽ quay quanh ED. Tính diện tích bề mặt và thể tích của hình gây ra bởi tứ giác EMAD.

33. Cho đường tròn, tâm O bán kính R và một dây AB bất kỳ. Kéo dài AB một đoạn BC = R; CO cắt đường tròn ở E và D, E nằm giữa C và O.

1. Chứng minh rằng: $\widehat{AOD} = 3\widehat{ACD}$.

2. Trong trường hợp đặc biệt ta lấy AB = R. Tính góc AOD. Phần đảo đúng hay không? Hãy chứng minh điều khẳng định đó.

3. Với giả thiết AB = R. Cho hình vẽ quay quanh CD. Tính thể tích V của hình gây ra bởi ΔOAB.

34. Cho hình thang ABCD, đường cao AH, đáy nhỏ AB = AH = a, $\widehat{C} = 45^0, \widehat{D} = 60^0$. Tính theo a:

1. Các cạnh bên và diện tích của hình thang.

2. Vẽ đường tròn đường kính AD. Tính diện tích S_o của phần chung của hình tròn đường kính AD và hình thang.

3. Thể tích V của hình sinh ra bởi ADH khi cho hình vẽ quay quanh AD.

35. Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC) nội tiếp đường tròn (O). Trung tuyến AM gặp (O) ở N; phân giác trong AD của góc BAC gặp (O) ở P; đường cao AH gặp (O) ở S. Nối MP.

1. Chứng minh rằng MP và AH song song.

2. So sánh các góc MAP, MPA và PAS.

3. Suy ra rằng AD cũng là phân giác của góc hợp bởi đường cao AH và trung tuyến AM.

4. Cho BC = 2a, $\widehat{ABC} = 30^0$. Tính thể tích của hình gây ra bởi ΔABH khi cho hình vẽ quay quanh BC.

36. Cho tam giác ABC cân tại A, AB = 16, BC = 24, đường cao AE. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC tại F.

a. Chứng minh rằng OECF là tứ giác nội tiếp và BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b. Gọi M là giao điểm của BF với đường tròn (O). Chứng minh rằng BMOC là tứ giác nội tiếp.

37. Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. các dây BC, BD của đường tròn (O) tiến xúc với đường tròn (O') theo thứ tự tại E. F. Gọi I là giao điểm của EF với tia phân giác của góc CAD. Chứng minh rằng:

a. $\widehat{DAF} = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$.

b. $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$.

c. I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

38. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Lấy điểm M bất kì thuộc DF. kẻ MN song song với BC (N thuộc DE). Lấy điểm I trên đường thẳng DE sao cho $\widehat{MAI} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng:

a. Tam giác AMN là tam giác cân

b. AMNI là tứ giác nội tiếp

c. MA là tia phân giác của góc FMI.

39. Cho hai đường tròn (O) và(O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD ($C \in (O)$, $D \in (O')$). Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên OO" Chứng minh rằng $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$.

40. Cho tam giác nhọn ABC , Kẻ các đường cao AD, BE, CF. Gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của D lên AB, BE, CF, AC. Chứng minh :

1 Các tứ giác DMFP, DNEQ là hình chữ nhật.

2. Các tứ giác BMND; DNHP; DPQC nội tiếp .

3. Hai tam giác HNP và HCB đồng dạng.

4. Bốn điểm M, N, P, O thẳng hàng.

41. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

1. Chứng minh các tứ giác OBIA, AICO' nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^0$.

3. Tính số đo góc OIO'.

4. Tính độ dài BC biết OA = 9cm. O A = 4cm.

42. Cho hai đường tròn (O); (O') tiếp xúc ngoài tại A. BC là tiếp tuyến chung ngoài $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A có tiếp tuyến chung ngoài BC ở M. Gọi E là giao điểm của OM và AB. F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh :

1. Chứng minh các tứ giác OBMA, AMCO' nội tiếp .

2. Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.

3. ME.MO = MF.MO'.

4. OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

5. BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

43. Cho hai hình vuông ABCD, AB'C'D' sao cho nếu vẽ các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông thì chiều từ A lần lượt qua B, C, D và chiều từ A lần lượt qua B', C', D' đều theo chiều quay của kim đồng hồ. Gọi I là giao điểm của BB' và DD'. Chứng minh rằng :

a. I thuộc đường tròn ngoại tiếp mỗi hình vuông.

b. CC' cũng đi qua điểm I.

44. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường vuông góc với AD tại A cắt BC Ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD Ở F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

45. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AC, AB theo thứ tự Ở D, E, F. Biết $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

46. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB và A'B', các tiếp tuyến chung trong CD và EF (A, A', C, E thuộc (O) ; B, B', D, F thuộc (O')). Gọi M là giao điểm của AB và EF. N là giao điểm của A'B: và CD, H là giao điểm của MN và OO'. Chứng minh rằng :

a. MN vuông góc với OO'.

b. Năm điểm O', B, M, H, F thuộc cùng một đường tròn.

c. Năm điểm O, A, M, E, H thuộc cùng một đường tròn.

d. Ba điểm H, D, B thẳng hàng.

e. Ba điểm A, H, C thẳng hàng.

47. Cho đường tròn tâm O, hai điểm A và B Ở vị trí đối xứng với nhau qua một bán kính của đường tròn. Vẽ dây CD đi qua A, dây EF đi qua B. Các đường thẳng CE, DF cắt đường thẳng AB theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng AN = BM.

48. Cho ABCD là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song, F là giao điểm của AB và CD, E là giao điểm của DA và CB. Gọi H và G theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

a. Tia phân giác của góc BED cũng là tia phân giác của góc HEG.

b. Các tia phân giác của các góc BED và BFD gặp nhau tại một điểm nằm trên GH.

49 . Cho tứ giác ABCD. Vẽ bốn đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của một trong các tam giác ABC, BCD. CDA DAB. Chứng minh rằng bốn đường tròn đó cùng giao nhau tại một điểm

50 . Cho tam giác ABC, đường cao AH. Kẻ ra ngoài tam giác ABC các tia Ax, Ay theo thứ tự tạo với AB, AC các góc nhọn bằng nhau. Gọi I là hình chiếu của B trên Ax, gọi K là hình chiếu của C trên Ay, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng :

a. MI = MK.

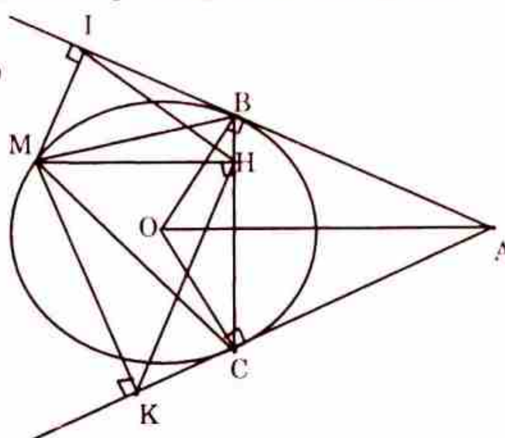
b. Bốn điểm I, H, M. K thuộc cùng một đường tròn.

Hướng dẫn và đáp số

1. 1. *(HS tự giải)*

2. Tứ giác ABOC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{BCO}$ (nội tiếp cùng chắn cung BO).

3. Theo giả thiết MH vuông góc với BC



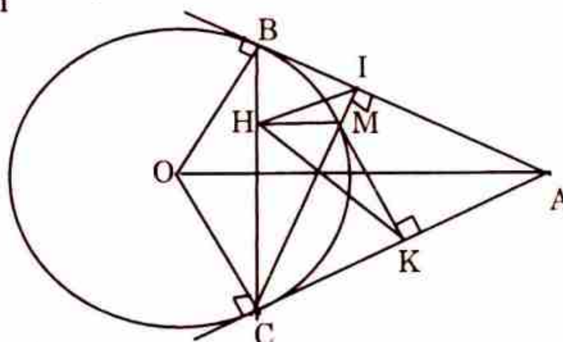
$\Rightarrow \widehat{MHC} = 90^0$; $MK \perp CA \Rightarrow \widehat{MKC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{MHC} + \widehat{MKC} = 180^0$ mà đây là hai góc đối

$\Rightarrow$ tứ giác MHCK nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HCM} = \widehat{HKM}$ (nội tiếp cùng chắn cung HM).Chứng minh tương tự ta có tứ giác MHBI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MHI} = \widehat{MBI}$ (nội tiếp cùng chắn cung IM).



Mà $\widehat{HCM} = \widehat{MBI}$ (= 1/2 sđ $\overparen{BM}$)

$\Rightarrow \widehat{HKM} = \widehat{MHI}$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có

$\widehat{KHM} = \widehat{HIM}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta HIM \sim \Delta KHM$.

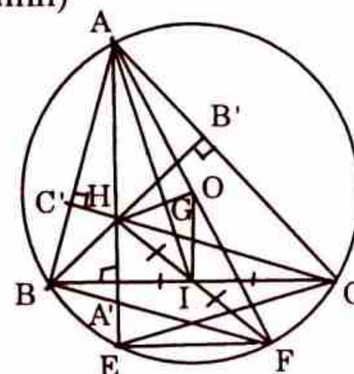
4. Theo trên $\Delta HIM \sim \Delta KHM \Rightarrow \dfrac{MI}{MH} = \dfrac{MH}{MK} \Rightarrow MI.MK = MH^2$.

2. 1. Theo giả thiết F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC $\Rightarrow$ I là trung điểm BC và HE $\Rightarrow$ BHCF là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

2. (HD) Tứ giác AB'HC' nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{B'HC'} = 180^0$, mà $\widehat{BHC} = \widehat{B'HC'}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$



Theo trên BHCF là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BFC}$

$\Rightarrow \widehat{BFC} + \widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABFC nội tiếp

$\Rightarrow$ F thuộc (O). H và E đối xứng nhau qua BC

$\Rightarrow \Delta BHC = \Delta BEC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BEC} \Rightarrow \widehat{BEC} + \widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow$ ABEC nội tiếp $\Rightarrow$ E thuộc (O).

3. Ta có H và E đối xứng nhau qua BC $\Rightarrow$ BC $\perp$ HE (1) và IH = IE mà I là trung điểm của HF $\Rightarrow$ EI = $\frac{1}{2}$HE $\Rightarrow$ tam giác HEF vuông tại E hay FE $\perp$ HE (2)Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ EF // BC $\Rightarrow$ BEFC là hình thang. (3)

Theo trên E $\in$ (O) $\Rightarrow$ $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$ (nội tiếp cùng chắn cung CE) (4).

Theo trên F $\in$ (O) và $\widehat{FEA} = 90^0 \Rightarrow$ AF là đường kính của (O)

$\Rightarrow \widehat{ACF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{CAE}$ (vì cùng phụ $\widehat{ACB}$) (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{CBE}$ (6).

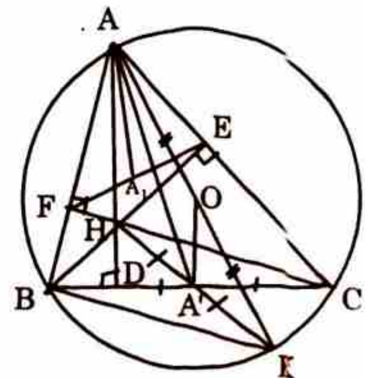
Từ (3) và (6) $\Rightarrow$ tứ giác BEFC là hình thang cân.

4. Theo trên AF là đường kính của () $\Rightarrow$ O là trung điểm của AF; BHCF là hình bình hành $\Rightarrow$ I là trung điểm của HF $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của tam giác AHF $\Rightarrow$ OI = $\frac{1}{2}$AH. Theo giả thiết I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC (Quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow$ $\widehat{OIG} = \widehat{HAG}$ (vì so le trong); lại có $\widehat{OGI} = \widehat{HGA}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta OGI = \Delta HGA$

$\Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{OI}{HA}$ mà $OI = \frac{1}{2}AH \Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{1}{2}$ mà AI là trung tuyến của tam giác ABC (do I là trung điểm của BC) $\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC.

3. 1 Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$)

$\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (cùng bù $\widehat{CEF}$) $\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$.



2. Vẽ đường kính AK $\Rightarrow$ KB // CH (cùng vuông góc AB); KC // BH (cùng vuông góc AC)

$\Rightarrow$ BHKC là hình bình hành

$\Rightarrow$ A' là trung điểm của HK

$\Rightarrow$ OK là đường trung bình của ΔAHK

$\Rightarrow$ AH = 2OA'

3. Áp dụng tính chất: *nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa hai trung tuyến, tỉ số giữa hai bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng tỉ số đồng dạng*. Ta có: $\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{AA'}{AA_1}$ (1) trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC; R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAEF; AA' là trung tuyến của ΔABC; AA_1 là trung tuyến của ΔAEFF.

Từ (1) $\Rightarrow R.AA_1 = AA'.R' = AA'.\frac{AH}{2} = AA'.\frac{2AO'}{2}$

Vậy $R.AA_1 = AA'.A'O$. (2)

4. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AC, AB, ta có $OB' \perp AC$; $OC' \perp AB$ (bán kính đi qua trung điểm của một dây không qua tâm)

$\Rightarrow OA', OB', OC'$ lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OCA, OAB.

$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}(OA'.BC + OB'.AC + OC'.AB)$

$2S_{ABC} = OA'.BC + OB'.AC' + OC'.AB\,(3)$.

Theo (2) $OA' = R.\frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỉ số giữa 2 trung tuyến của hai tam giác đồng dạng AEF và ABC nên $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{EF}{BC}$.

Tương tự ta có: $OB' = R.\frac{FD}{AC}; OC' = R.\frac{ED}{AB}$ thay vào (3) ta được

$2S_{ABC} = R\left(\frac{EF}{BC}.BC + \frac{ED}{AB}.AB + \frac{FD}{AC}.AC\right); 2S_{ABC} = R(EF + FD + DE)$

$R(EF + FD + DE) = 2S_{ABC}$

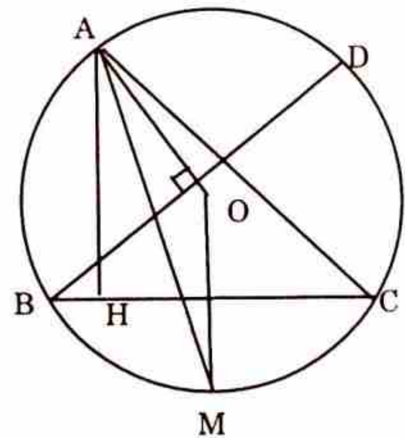
Do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

4. 1. AM là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$

$\Rightarrow BM = CM \Rightarrow$ M là trung điểm của cung BC

$\Rightarrow OM \perp BC$; theo giả thiết $AH \perp BC$

$\Rightarrow OM \,//\, AH \Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{OMA}$ (so le). Mà $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$ (vì tam giác OAM cân tại O do có OM = OA = R) $\Rightarrow \Delta HAM = \Delta OAM \Rightarrow$ AM là tia phân giác của góc OAH.



2. Vẽ dây $BD \perp OA \Rightarrow AB = AD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACB}$

Ta có $\widehat{OAH} = \widehat{DBC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{ABC} - \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$ hay $\widehat{OAH} = \hat{B} - \hat{C}$

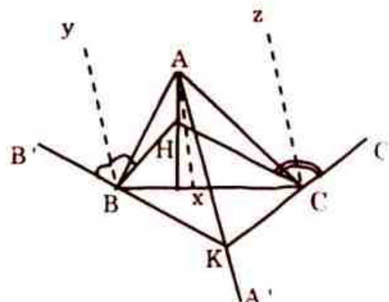
3. a. Theo giả thiết $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^0$; theo trên

$$\widehat{OAH} = \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = 20^0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 120^0 \\ \hat{B} - \hat{C} = 20^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 70^0 \\ \hat{C} = 50^0 \end{cases}$$

b. $S_{vp} = S_{qBOC} - S_{BOC} = \dfrac{\pi.R^2.120^0}{360^0} - \dfrac{1}{2}R.\sqrt{3}.\dfrac{R}{2}$

$= \dfrac{\pi.R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2.(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$ (đvdt)

5. Giả sử ta có hình vẽ như trên (các trường hợp khác chứng minh tương tự). BB' cắt CC'' ở K. Do By // Cz nên dễ dàng chứng minh được: $\widehat{HBy} + \widehat{HCz} = \widehat{BHC}$ (1)



$\widehat{B'By} + \widehat{C'Cz} = \widehat{BKC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BKC}$.

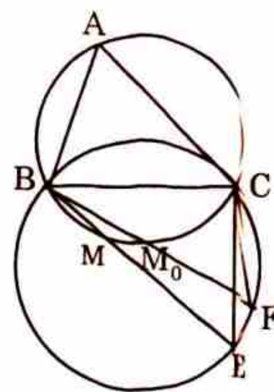
Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$

Nên $\widehat{BAC} + \widehat{BKC} = 180^0$.

Vậy K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Chứng minh tương tự, BB' cắt AA' thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó K trùng K'.

6. Gọi S là diện tích tam giác. Học sinh phải chứng minh S = p.r (p: nửa chu vi của tam giác; r: bán kính đường tròn nội tiếp tam giác)



Mặt khác $S = \dfrac{1}{2}c.h_c$, nên $\dfrac{r}{h_c} = \dfrac{c}{2p} = \dfrac{c}{a+b+c}$:

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \le 2c^2$

$\Leftrightarrow a + b \le \sqrt{2}.c \Leftrightarrow a + b + c \le \left(\sqrt{2}+1\right)c$

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{a+b+c} \ge \sqrt{2} - 1 > \dfrac{2}{5}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

7. Trên tia đối của MB lấy điểm E sao cho $\dfrac{MC}{ME} = \dfrac{2008}{2009}$

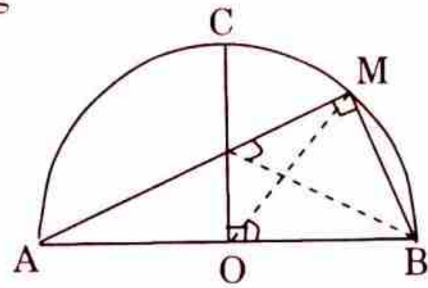
Khi đó $\widehat{CME} = \widehat{BAC}$ (vì cùng bù với $\widehat{BMC}$) $\Rightarrow \Delta CME$ có các góc không đổi. Ta dựng đường thẳng vuông góc với BC tại C, cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE tại F. Khi đó BF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE $\Rightarrow$ F là điểm cố định.

Gọi M_o là giao điểm thứ 2 của BF và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra M_o là điểm cố định

Ta có $2008.MB + 2009.MC = 2008.MB + 2009.ME = 2008.BE \le 2008BF$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M_o$

8. 1. Tứ giác OBMN có 2 góc đối bù nhau ($\widehat{MNB} = \widehat{NOB} = 90^0$) nên nội tiếp được. Hai tam giác AMO và ABN có: $\widehat{A}$ chung



$\widehat{AMO} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn cung NO)

Nên đồng dạng $\Delta AMO \sim \Delta ABN$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AO}{AN} \Rightarrow AM.AN = AB.AO = 2R^2$

Điều này chứng tỏ tích số AM.AN không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung BC.

2. Để cho ΔMNB cân tại M, ta phải có:

$\widehat{MNB} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{MOB} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{MAB} = 22^0 30'$. Vậy $\widehat{MAB} = 22^0 30'$

3. Trong tam giác vuông OAN, ta có:

$\tan \widehat{A} = \dfrac{ON}{OA} \Leftrightarrow ON = OA.\tan \widehat{A} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R \Leftrightarrow CN = OC - ON = (2 - \sqrt{2})R$

Khi quay quanh OA, ΔANC sinh ra một hình (Σ) có thể tích V bằng hiệu các thể tích V_1 và V_2 của hai hình nón đỉnh A, đường cao AO và có bán kính đáy theo thứ tự là OC và ON.

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.OC^2.AO; V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.ON^2.AO$

$\Rightarrow V = V_1 - V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.AO\left(OC^2 - ON^2\right) = \dfrac{1}{3}\pi.R\left(OC + ON\right).CN$

$= \dfrac{1}{3}\pi.R\left[R + R\left(\sqrt{2} - 1\right)\right].\left(2 - \sqrt{2}\right)R = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi.R^3$ (đvtt)

Vậy: thể tích của hình gây ra bởi ΔANC khi uay quanh OA là:

$$V = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi.R^3 \text{ (đvtt)}$$

9. 1. Vì $AH \perp BC$ tại H nên đường tròn (A) tâm A bán kính AH tiếp xúc với BC tại H. Ta có: BH = BD (tiếp tuyến xuất phát từ B) $\Rightarrow$ AB là phân giác của góc $\widehat{DAH}$. Tương tự AC là phân giác của góc $\widehat{HAE}$

$\Rightarrow \widehat{DAE} = 2\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow$ D, A, E thẳng hàng.

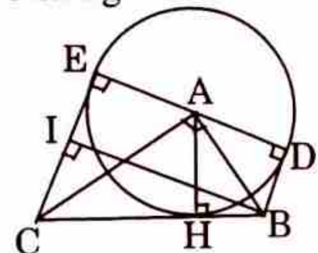
Mà D và E nằm trên đường tròn (A) nên DE là một đường kính của (A).

2. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH nên ta có: Nhưng

$BH.CH = AH^2; BH = BD;$

$CH = CE; AH = \dfrac{DE}{2}$

$\Rightarrow BD.CE = \dfrac{DE^2}{4}$



3. Khi $\widehat{ABC} = 60^0$ thì tam giác vuông ABC là nửa tam giác đều cạnh BC = 2a, đường cao AC, nửa cạnh là AB.

$AC = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; AB = \frac{BC}{2} = a; AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}; CH = \frac{3a}{2}$

4. Kẻ $BI \perp CE$. Vì $BD < CE$ nên I nằm giữa C và E.

BIED là một hình chữ nhật có: $IE = BD = BH = \frac{a}{2}; BI = DE = 2AH = a\sqrt{3}$.

Khi quay quanh CE, hình thang vuông BCED gây ra một hình (H) gồm một hình nón và một hình trụ tròn xoay có đáy chung, hình nón chồng lên hình trụ.

- Hình nón có đỉnh là C, đường cao $CI = CE - IE = CH - BH = a$, bán kính đáy là IB, có thể tích là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi.IB^2CI = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2 a. = \pi.a^3$ (đvtt)

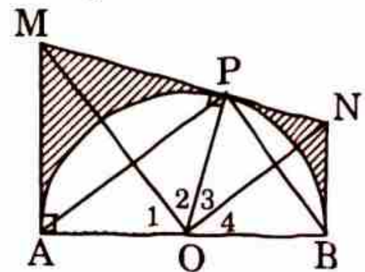
- Hình trụ tròn xoay đường cao IE, bán kính đáy IB, có thể tích là:

$$V_2 = \pi.IB^2.IE = \pi\left(a\sqrt{3}\right)^2.\frac{a}{2} = \frac{3\pi.a^3}{2} \text{ (đvtt)}$$

Do đó thể tích của (H) là: $V = V_1 + V_2 = \pi.a^3 + \frac{3\pi.a^3}{2} = \frac{5\pi.a^3}{2}$ (đvtt)

10. 1. Ta có: MA = MP (tính chất tiếp tuyến xuất phát từ M)

$\Rightarrow \Delta MAO = \Delta MPO \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.



Tương tự ta có:

$\hat{O}_3 = \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{MON} = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^0$.

Mặt khác, tứ giác AOPM có 2 góc bù nhau ($\hat{A} = \hat{P} = 90^0$) nên nội tiếp được

Suy ra: $\hat{A}_1 = \widehat{M}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OP).

Các tam giác vuông MON và APB có một góc nhọn bằng nhau ($\hat{A}_1 = \widehat{M}_1$) nên đồng dạng $\Delta MON \sim \Delta APB$.

2. ΔMON vuông tại O, có đường cao OP (bán kính OP vuông góc với tiếp tuyến MN tại đầu mút P của bán kính). Do đó ta có: $MP.PN = OP^2$. Nhưng MP =AM; PN = BN. Do đó, ta có: $AM.BN = R^2$.

3. Theo trên, ta có: $\Delta MON \sim \Delta APB$. Suy ra: $\frac{S_{(MON)}}{S_{(APB)}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2$

Ta có: $AM.BN = R^2 \Rightarrow AM = \frac{R^2}{BN} = \frac{R^2}{\frac{R}{2}} = 2R$

$\Rightarrow MN = MP + PN = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{S_{(MON)}}{S_{(APB)}} = \frac{25}{16}$.

4. Khi cho hình vẽ quay quanh AB: Hình thang AMNB gây ra hình nón cụt đường cao AB = 2R, bán kính 3 đáy là: AM = 2R và $BN = \frac{R}{2}$ có thể tích là:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(AM^2 + BN^2 + AM.BN\right)2R$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(4R^2 + \frac{R^2}{4} + 2R.\frac{R}{2}\right).2R = \frac{7\pi.R^3}{2} \text{ (đvtt)}$$

nửa hình tròn (O) gây ra hình cầu đường kính AB = 2R, có thể tích là: $V_2 = \frac{4\pi.R^3}{3}$ (dvtt)

Do đó thể tích V của hình phải tìm là:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{7\pi R^3}{2} - \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{13\pi.R^3}{6} \text{ (đvtt)}$$

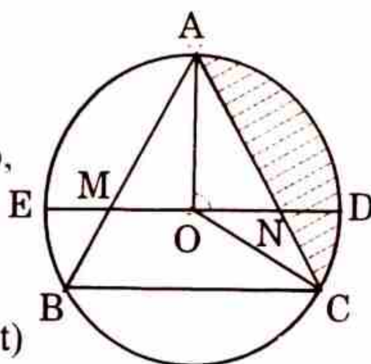
Vậy $V = \frac{13\pi.R^3}{6}$ (đvtt)

11. 1.Ta có: MN // BC $\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$.

Suy ra Δ AMN đều, nhận AO = R làm đường cao,

$$AO = \frac{MN\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có: $S_{(AON)} = \frac{1}{2}AO.ON = \frac{1}{2}R.\frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{6}$ (đvdt)



2. Diện tích S của hình viên phân ADC bằng hiệu số các diện tích S_1 và S_2 của hình quạt AOC và Δ AOC.Nhưng Δ ABC đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^0$

Do đó: $S_1 = \frac{1}{3}\pi.R^2$; $S_2 = \frac{1}{3}S_{(ABC)} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow S_{(\text{viên phân})} = S_1 - S_2 = \frac{\pi.R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12} \text{ (đvdt).}$$

3. Diện tích S' của "tam giác cong" AND bằng hiệu số các diện tích S_3 và S_4 của hình quạt AOD và Δ AON. Ta có:

$$S_3 = \frac{1}{4}\pi.R^2; S_4 = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S' = \frac{\pi.R^2}{4} - \frac{R^2\sqrt{3}}{6} = \frac{(3\pi - 2\sqrt{3}).R^2}{12}$$

Diện tích S" của "tam giác cong" CND bằng hiệu số các diện tích S và S' của hình viên phân ADC và tam giác cong AND.

$$S'' = S - S' = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3}).R^2}{12} - \frac{(3\pi - 2\sqrt{3}).R^2}{12} \Rightarrow S'' = \frac{(\pi - \sqrt{3}).R^2}{12}$$

Do đó ta có: $\frac{S'}{S''} = \frac{3\pi - 2\sqrt{3}}{\pi - \sqrt{3}} \Rightarrow 4 < \frac{S'}{S''} < 5$

4. Khi quay quanh ED, tam giác cong AND gây ra một hình có thể tích V bằng hiệu các thể tích V_1 và V_2 của nửa hình cầu gây ra bởi hình quạt AOD và hình nón gây ra bởi AON. Ta có: $V_1 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{2\pi R^3}{3}$,

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.OA^2.NO = \frac{1}{3}\pi.R^2.\frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi.R^3\sqrt{3}}{9}$

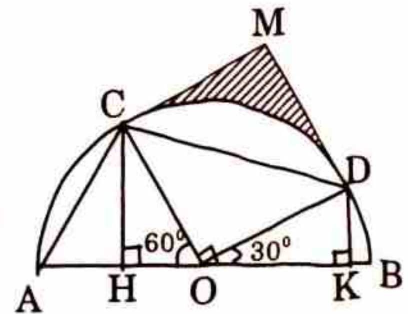
Do đó: $V = V_1 - V_2 = \frac{2\pi.R^3}{3} - \frac{\pi.R^3\sqrt{3}}{9} = \frac{(6-\sqrt{3})\pi.R^3}{9}$.

12. 1. Ta có: $\widehat{COD} = 180^0 - (\widehat{AOC} + \widehat{BOD}) \Rightarrow \widehat{COD} = 90^0 \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 90^0$

$\Rightarrow CD = R\sqrt{2}$

2. Ta có: $OC \perp CM$, $OD \perp DM$.

Tứ giác OCMD có 3 góc vuông ($\hat{O} = \hat{C} = \hat{D} = 90^0$) nên là hình chữ nhật, lại có 2 cạnh liên tiếp bằng nhau (OC = OD = R) nên là một hình vuông. Diện tích của hình vuông OCMD là: $S_1 = R^2$. Diện tích hình quạt COD là: $S_2 = \frac{\pi R^2}{4}$.



Suy ra diện tích S của phần tứ giác OCMD nằm ngoài (O) là:

$$S = S_1 - S_2 = R^2 - \frac{\pi.R^2}{4} = \frac{(4-\pi)R^2}{4}$$

3. Dựng CH, DK $\perp$ AB; ΔOAC đều cạnh $R \Rightarrow HC = \frac{R\sqrt{3}}{2}; OH = \frac{R}{2}$

ΔKOD là nửa tam giác đều, cạnh OD, đường cao OK, nửa cạnh là KD

$OK = \frac{R\sqrt{3}}{2}; KD = \frac{R}{2} \Rightarrow HK = OH + OK = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)R}{2}$

Khi quay quanh AB: Hình thang vuông CHKD gây ra một hình nón cụt đường cao HK, bán kính 2 đáy là KC và KD, có thể tích là:

$I = \frac{1}{3}\pi.HK.\left(HC^2 + KD^2 + HC.KD\right) = \frac{1}{3}\pi.\frac{(\sqrt{3}+1)R}{2}\left(\frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$

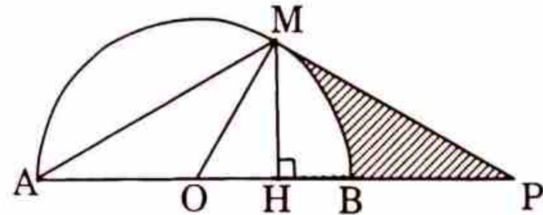
$= \frac{(\sqrt{3}+1)(4+\sqrt{3})\pi.R^3}{24} = \frac{(7+5\sqrt{3})\pi.R^3}{24}$, ΔOCH gây ra hình nón đỉnh O, đường cao OH, bán kính đáy HC, có thể tích là:

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.HC^2.OH = \frac{1}{3}\pi.\frac{3R^2}{4}.\frac{R}{2} = \frac{\pi.R^3}{8}$; ΔODK gây ra hình nón đỉnh O, đường cao OK, bán kính đáy K, có thể tích là:

$V_3 = \frac{1}{3}\pi.KD^2.OK = \frac{1}{3}\pi.\frac{R^2}{4}.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$. Do đó thể tích V của hình gây ra bởi ΔOCD khi quay quanh AB là:

$$V = V_1 - (V_2 + V_3) = \frac{(7+5\sqrt{3})\pi.R^3}{24} - \left(\frac{\pi R^3}{8} + \frac{\pi.R^3\sqrt{3}}{24}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\pi.R^3}{6}$$

Vậy: $V = \frac{(\sqrt{3}+1)\pi.R^3}{6}$



13.1. Ta có: $OM \perp MP$, $OP = 2R$. Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông MOP ta có:

$PM^2 = OP^2 - OM^2 = 3R^2 \Rightarrow PM = R\sqrt{3}$

Hoặc: tam giác MOP vuông tại M có cạnh huyền OP = 2R gấp 2 cạnh góc vuông OM = R nên là nửa tam giác đều, cạnh OP, đường cao PM.

$\Rightarrow PM = \frac{OP\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$ .Suy ra: $\widehat{POM} = 60^0; \widehat{OPM} = 30^0$; ΔHOM vuông tại H, có góc $\hat{O} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều, cạnh OM, đường cao MH, OH là nửa cạnh $MH = \frac{OM\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}; OH = \frac{R}{2}; PH = \frac{3R}{2}$.

2. Ta có: $S_{(OMP)} = \frac{1}{2}MO.MP = \frac{1}{2}R.R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{(hqBOM)} = \frac{1}{6}\pi.R^2 \Rightarrow S = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{(3\sqrt{3}-\pi)R^2}{6}$.

3.a. Vậy: thể tích phần ΔOMP:

$$V = \frac{1}{3}\pi.HM^2.OH + \frac{1}{3}\pi.HM^2.PH = \frac{1}{3}\pi.HM^2.OP = \frac{1}{3}\pi.\frac{3R^2}{4}.2R = \frac{\pi R^3}{2}.$$

Vậy: $V = \frac{\pi R^3}{2}$

b. Thể tích của hình gây ra bởi hình quạt BOM là $V_1 = \frac{1}{3}.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi.R^3}{9}$

Suy ra thể tích V' của hình gây ra bởi phần ΔOMP nằm ngoài (O) khi quay quanh OP là: $V' = V - V_1 = \frac{\pi.R^3}{2} - \frac{4\pi.R^3}{9} = \frac{\pi.R^3}{18}$.

Vậy: $V' = \frac{\pi.R^3}{18}$.

14. 1. Theo giả thiết M là trung điểm của BC $\Rightarrow$ MB = MC

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{BAM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$ AK là tia phân giác của góc CAB $\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$.

(tính chất tia phân giác của tam giác)

2. (HD) Theo giả thiết $CD \perp AB$

$\Rightarrow$ A là trung điểm của CD $\Rightarrow \widehat{CMA} = \widehat{DMA}$

$\Rightarrow$ MA là tia phân giác của góc CMD.

3. (HD) Theo giả thiết M là trung điểm của BC

$\Rightarrow OM \perp BC$ tại I $\Rightarrow \widehat{OIC} = 90^0$; $CD \perp AB$ tại H

$\Rightarrow \widehat{OHC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OIC} + \widehat{OHC} = 180^0$ mà đây là hai góc đối $\Rightarrow$ tứ giác OHCI nội tiếp

4. Kẻ $MJ \perp AC$ ta có MJ // BC (vì cùng vuông góc với AC). Theo trên $OM \perp BC$

$\Rightarrow OM \perp MJ$ tại J suy ra MJ là tiếp tuyến của đường tròn tại M

15. 1. Theo giả thiết $\widehat{BAC} = 60^0$

$\Rightarrow$ sđ $\widehat{BC} = 120^0$ (tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$ (tính chất góc ở tâm)

* Theo trên sđ $\widehat{BC} = 120^0 \Rightarrow$ BC là cạnh của một tam giác đều nội tiếp (O; R) $\Rightarrow BC = R\sqrt{3}$.

2. CD là đường kính $\Rightarrow \widehat{DBC} = 90^0$ hay $DB \perp BC$; theo giả thiết AH là đường cao $\Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow$ BD // AH. Chứng minh tương tự ta cũng được AD // BH.

3. Theo trên $\widehat{DBC} = 90^0 \Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại B có $BC = R\sqrt{3}$; CD = 2R

$\Rightarrow BD^2 = CD^2 - BC^2 \Rightarrow BD^2 = (2R)^2 - (R\sqrt{3})^2 = 4R^2 - 3R^2 \Rightarrow BD = R$.

Theo trên BD // AH; AD // BH $\Rightarrow$ BDAH là hình bình hành

$\Rightarrow AH = BD \Rightarrow AH = R$.

16. 1. AM là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Rightarrow BM = CM \Rightarrow$ M là trung điểm của cung BC $\Rightarrow OM \perp BC$.

2. Xét ΔMCI và ΔMAC có $\widehat{MCI} = \widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau); $\widehat{M}$ là góc chung.

$\Rightarrow \Delta MCI \sim \Delta MAC \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MI}{MC} \Rightarrow MC^2 = MI.MA$.

3. (HD) $\widehat{MAN} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{P}_1 = 90^0 - \widehat{K}_1$ mà $\widehat{K}_1$ là góc ngoài của tam giác AKB nên $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}$

(tính chất phân giác của góc)

$\Rightarrow \widehat{P}_1 = 90^0 - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right)$ (1)

CQ là tia phân giác của góc ACB

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{A} - \widehat{B}\right) = 90^0 - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{P}_1 = \widehat{C}_1$ hay $\widehat{QPB} = \widehat{QCB}$ mà P và C nằm cùng về một nửa mặt phẳng bờ BQ nên cùng nằm trên cung chứa góc $90^0 - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right)$ dựng trên BQ. Vậy bốn điểm P, C, B, Q cùng thuộc một đường tròn.

17.1. Vì ΔABC cân tại A nên đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH xuất phát từ đỉnh A trùng nhau, tức là AA' đi qua H

$\Rightarrow \Delta ACA'$ vuông tại C có đường cao $CH = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$;

$AH = 4cm \Rightarrow CH^2 = AH.AH'$

$\Rightarrow A'H = \frac{CH^2}{AH} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} = 2,5$

$\Rightarrow AA' = AH + HA' = 4 + 2,5 = 6,5(cm)$

$\Rightarrow R = AA' : 2 = 6,5 : 2 = 3,25(cm)$

2. Vì AA' và CC' là hai đường kính nên cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường $\Rightarrow$ ACA'C' là hình bình hành. Lại có $\widehat{ACA'} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa dgt) nên suy ra tứ giác ACA'C' là hình chữ nhật.

3. Theo giả thiết $AH \perp BC$; $AK \perp CC'$ $\Rightarrow$ K và H cùng nhìn AC dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AC hay tứ giác ACHK nội tiếp (1) $\Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{H}_1$ (nội tiếp cung chắn cung AK); ΔAOC cân tại O (vì OA = OC = R) $\Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{H}_1 \Rightarrow HK$ // AC (vì có hai góc so le trong bằng nhau) $\Rightarrow$ tứ giác ACHK là hình thang (2). Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ACHK là hình thang cân.

18. 1. Tam giác ABC đều

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^0$ (1);

$\widehat{DOE} = 60^0$ (gt) $\Rightarrow \widehat{DOB} + \widehat{EOC} = 120^0$ (2).

ΔDBO có $\widehat{DBO} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BDO} + \widehat{BOD} = 120^0$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{BDO} = \widehat{COE}$ (4).

Từ (2) và (4) $\Rightarrow \Delta BOD \sim \Delta CEO \Rightarrow \dfrac{BD}{CO} = \dfrac{BO}{CE}$

$\Rightarrow$ BD.CE = BO.CO mà OB = OC = R không đổi

$\Rightarrow$ BD.CE = R^2 không đổi.

2. Theo trên $\Rightarrow \Delta BOD \sim \Delta CEO \Rightarrow \dfrac{BD}{CO} = \dfrac{BO}{CE} = \dfrac{OD}{OE}$ mà CO = BO $\Rightarrow \dfrac{BD}{BO} = \dfrac{OD}{OE}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{OD} = \dfrac{BO}{OE}$ (5). Lại có $\widehat{DBO} = \widehat{DOE} = 60^0$ (6).

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \Delta DBO \sim \Delta DOE \Rightarrow \widehat{BDO} = \widehat{ODE} \Rightarrow$ DO là tia phân giác góc BDE.

3. Theo trên DO là tia phân giác góc BDE $\Rightarrow$ O cách đều DB và DE $\Rightarrow$ O là tâm đường tròn tiếp xúc với DB và DE. Vậy đường tròn tâm O tiếp xúc với AB luôn tiếp xúc với DE.

19. 1. Kẻ AH, BK $\perp$ CD $\Rightarrow$ AH // BK và AH = BK

AHKB là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ HK = AB = 2a.

Hai tam giác AHD và BKC vuông có cạnh huyền bằng nhau AD = BC và cạnh góc vuông bằng nhau: AH = BK (hoặc có 1 góc nhọn bằng nhau: $\widehat{D} = \widehat{C}$) nên bằng nhau.

ΔAHD = ΔBKC $\Rightarrow$ DH = KC = a

ΔAHD vuông tại H có $\widehat{D} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều cạnh AD.

Đường cao AH, nửa cạnh là HD = a; AD = 2HD = 2a; AH = $a\sqrt{3}$

Diện tích hình thang ABCD là: $S = \dfrac{AB + CD}{2}.AH = 3a^2\sqrt{3}$ (đvdt)

Vậy: AD = BC = 2a; AH = $a\sqrt{3}$; $S_{(ABCD)} = 3a^2\sqrt{3}$ (đvdt)

2. ΔAHC vuông tại H. Ta có:

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 3a^2 + 9a^2 = 12a^2 \Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}$

Vậy $AC = BD = 2a\sqrt{3}$

3. Trong tam giác vuông AHC, ta có:

Cạnh huyền AC = 2AH, cạnh góc vuông nên AHC là nửa tam giác đều có cạnh CA, đường cao CH. Suy ra $\widehat{ACH} = 30^0$. Tương tự: $\widehat{BDK} = 30^0$

Kẻ $OI \perp CD \Rightarrow DI = CI = 2a$; OIC là nửa tam giác đều, cạnh OC, đường cao CI, nửa cạnh là IO:

$CI = \frac{OC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OC = \frac{2CI\sqrt{3}}{3} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}; OI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi cho hình vẽ quay quanh CD, OCD gây ra một mặt (Σ) gồm 2 hình nón có đáy chung, bán kính IO, có đỉnh là C và D, đường cao CI và DI, đường sinh CO và DO. Diện tích xung quanh của (Σ) là:

$$S = \pi.IO.OD + \pi.OI.DO = 2\pi.IO.OC = 2\pi.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi a^2}{3}$$

Vậy: $S = \frac{16\pi a^2}{3}$. Thể tích của (Σ):

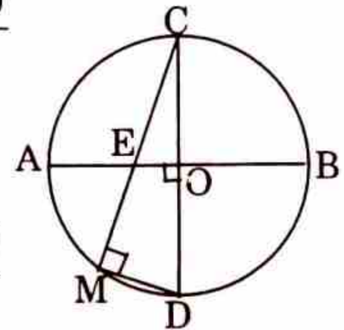
$$V = \frac{1}{3}\pi.IO^2.CI + \frac{1}{3}\pi.IO^2.DI = \frac{1}{3}\pi.IO^2.CD = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.4a = \frac{16\pi a^3}{9}$$

Vậy: $V = \frac{16\pi a^3}{9}$.

20. 1. Ta có: $AE = \frac{2AO}{3} = \frac{2R}{3} \Rightarrow EO = \frac{R}{3}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông OCE, ta có:

$$CE^2 = OC^2 + OE^2 = R^2 + \frac{R^2}{9} = \frac{10R^2}{9} \Rightarrow CE = \frac{R\sqrt{10}}{3}$$



2. Các tam giác MCD và OCE vuông góc và có góc C chung nên đồng dạng:

$\Delta MCD \sim \Delta OCE$:

$$\Rightarrow \frac{MC}{OC} = \frac{MD}{OE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{MC}{R} = \frac{MD}{\frac{R}{3}} = \frac{2R}{R\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$\Rightarrow MC = \frac{3R\sqrt{10}}{5}; MD = \frac{R\sqrt{10}}{5}$. Kẻ $MH \perp CD$

$\Rightarrow MH.CD = MC.MD \Rightarrow MH = \frac{MC.MD}{CD} = \frac{3R}{5}$. Tứ giác MEOD có 2 góc đối M và O cùng vuông, bù nhau ($\widehat{M} = \widehat{O} = 90^0$) nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính DE, tâm là trung điểm I của DE và có bán kính: $R' = \frac{DE}{2} = \frac{CE}{2} = \frac{R\sqrt{10}}{6}$.

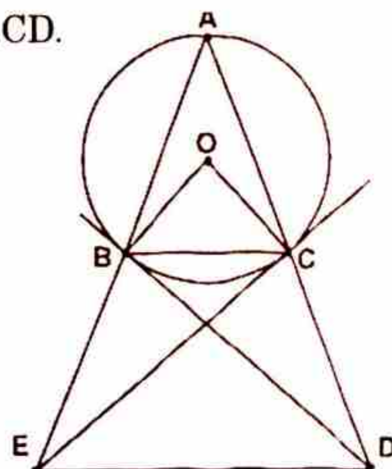
Ta có:

$$S_{(MEOD)} = S_{(\Delta MCD)} - S_{(OCE)} = \frac{1}{2}MC.MD - \frac{1}{2}.OC.OE = \frac{3R^2}{5} - \frac{R^2}{6} = \frac{13R^2}{30}.$$

Vậy: $S_{(MEOD)} = \dfrac{13R^2}{30}$

4. Khi quay quanh CD, ΔECD gây ra hình gồm 2 hình nón đỉnh C và D có đường cao CO, và DO, có chung đáy bán kính OE $\Rightarrow (\Sigma)$ có thể tích là: $V = \frac{1}{3}\pi.OE^2.CD = \frac{1}{3}\pi.\frac{R^2}{9}.2R = \frac{2\pi R^3}{27}$. Vậy: $V = \frac{2\pi R^3}{27}$.

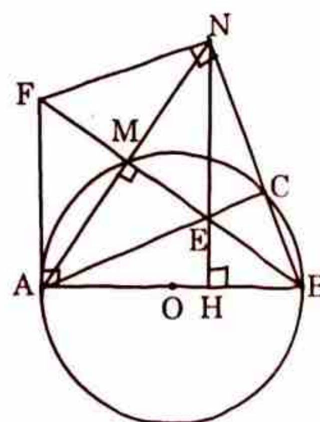
21. 1. Xét hai tam giác BCD và ABD có $\widehat{CBD} = \widehat{BAD}$ (vì là góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với một dây cung chắn một cung), lại có $\widehat{D}$ chung $\Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta DCB \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD^2 = AD.CD$.



2. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{DCB}$ mà $\widehat{CBD} = \widehat{BCD}$ (góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một cung) $\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{DCE} \Rightarrow$ B và C nhìn DE dưới cùng một góc do đó B và C cùng nằm trên cung tròn dựng trên DE $\Rightarrow$ tứ giác BCDE nội tiếp.

3. Tứ giác BCDE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BDE}$ (nội tiếp cùng chắn cung BE) mà $\widehat{BCE} = \widehat{CBD}$ (theo trên) $\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{BDE}$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra BC // DE.

22.1- (HS tự làm)



2. (HD) Dễ thấy E là trực tâm của tam giác NAB $\Rightarrow NE \perp AB$.

3. Theo giả thiết A và N đối xứng nhau qua M nên M là trung điểm của AN; F và E đối xứng nhau qua M nên M là trung điểm của EF $\Rightarrow$ AENF là hình bình hành $\Rightarrow$ FA // NE mà $NE \perp AB \Rightarrow FA \perp AB$ tại A $\Rightarrow$ FA là tiếp tuyến của (O) tại A.

4. Theo trên tứ giác AENF là hình bình hành $\Rightarrow$ FN // AE hay FN//AC mà $AC \perp BN \Rightarrow FN \perp BN$ tại N.
ΔBAN có BM là đường cao đồng thời là đường trung tuyến (do M là trung điểm của AN) nên BAN cân tại B $\Rightarrow$ BA = BN $\Rightarrow$ BN là bán kính của đường tròn (B; BA) $\Rightarrow$ FN là tiếp tuyến tại N của (B; BA).

23. 1. Theo giả thiết AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O $\Rightarrow$ OA là tia phân giác của góc BOC

$\Rightarrow \widehat{BOA} = \widehat{COA}$ (1); $OB \perp AB$ (AB là tiếp tuyến); $CH \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow OB \,//\, CH \Rightarrow \widehat{BOA} = \widehat{CDO}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{COD}$ cân tại C

$\Rightarrow CO = CD$. (3)

2. Theo trên ta có CO = CD mà CO = BO (= R) $\Rightarrow$ CD = BO (4) lại có OB // CH hay OB // CD (5). Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ BOCD là hình bình hành (6). Từ (6) và (3) $\Rightarrow$ BOCD là hình thoi.

3. M là trung điểm của CE $\Rightarrow OM \perp CE$ (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{OMH} = 90^0$, theo trên ta cũng có $\widehat{OBH} = 90^0$; $\widehat{BHM} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác OBHM là hình chữ nhật $\Rightarrow$ I là trung điểm của OH.

4. M là trung điểm của CE; KE và KC là hai tiếp tuyến $\Rightarrow$ O, M, K thẳng hàng.

24. 1. (HS tự làm)

2. Xét hai tam giác ADE và CDB ta có EAD = BCD (vì so le trong)

AD = CD (gt); $\widehat{ADE} = \widehat{CDB}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta CDB \Rightarrow AE = CB$ (1).

Theo trên AE // CB (2). Từ (1) và (2)

$\Rightarrow$ AECB là hình bình hành.

3. I là trung điểm của CF $\Rightarrow OI \perp CF$ (quan hệ đường kính và dây cung). Theo trên AECB là hình bình hành $\Rightarrow$ AB // EC $\Rightarrow OI \perp AB$ tại K,

$\Rightarrow \Delta BKG$ vuông tại K. Ta cũng có ΔBHA vuông tại H

$\Rightarrow \widehat{BGK} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$) mà $\widehat{BAH} = \widehat{BAC}$ (do ΔABC cân nên AH là phân giác) $\Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BGO}$.

25. 1. Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông IAD và IBC

Ta có: $IA^2 + ID^2 = AD^2$; $IB^2 + IC^2 = BC^2$

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = AD^2 + BC^2$

Trong đường tròn, đường kính là trục đối xứng.

Do đó:

$CD \perp AB \Rightarrow BC = BD$

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = AD^2 + BD^2 = AB^2$

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$.

Vậy: khi cho đường kính AB quay quanh O và dây CD vuông góc với AB tại một điểm I nào đó, $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$: không đổi

2. Gọi H là giao điểm của BC và IM. Ta chứng minh $\widehat{BHI} = 90^0$

ΔIAD vuông tại I, IM là trung điểm $\Rightarrow IM = MD = MA$

$\Rightarrow \Delta MID$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \hat{I}_1$. Nhưng: $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) và $\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 90^0 \Rightarrow \widehat{B}_1 + \hat{I}_2 = 90^0 \Rightarrow \widehat{BHI} = 90^0$

Vậy: trung tuyến IM của tam giác IAD vuông góc với BC.

3. Với $OI = \frac{R}{3} \Rightarrow IA = \frac{2R}{3}; IB = \frac{4R}{3}$

a. ΔIOC vuông tại I, ta có:

$$IC^2 = OC^2 - OI^2 = R^2 - \frac{R^2}{9} = \frac{8R^2}{9} \Rightarrow IC = \frac{2R\sqrt{2}}{3}.$$

Do đó ta có:

$$AC^2 = IA^2 + IC^2 = \frac{4R^2}{9} + \frac{8R^2}{9} = \frac{12R^2}{9} \Rightarrow AC = AD = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$BC^2 = 4R^2 - AC^2 = 4R^2 - \frac{12R^2}{9} = \frac{24R^2}{9} \Rightarrow BC = BD = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$ (cũng có thể tính BC bằng cách vận dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông IBC).

Chu vi của tứ giác ACBD là:

$$2p = 2(AC + BC) = 2\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3} + \frac{2R\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow 2p = \frac{4R\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

b. Khi quay quanh AB, ΔABC gây nên 2 hình nón có chung đáy bán kính IC và có đỉnh là A và B, đường cao AI và BI, đường sinh là AC và BC.

Hình do ABC gây nên:

Có diện tích xung quanh là:

$$S = \pi.IC.AC + \pi.IC.BC = \pi.IC(AC + BC)$$

$$= \pi.\frac{2R\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3} + \frac{2R\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4R^2\sqrt{6}}{9}\left(\sqrt{2} + 1\right).\pi$$

Thể tích là:

$$V = \frac{1}{3}\pi.IC^2.AI + \frac{1}{3}\pi.IC^2.BI = \frac{1}{3}\pi.IC^2.AB = \frac{1}{3}\pi.\frac{8R^2}{9}.2R = \frac{16\pi R^3}{27}$$

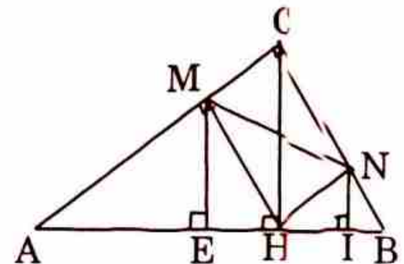
Vậy: $S = \frac{4R^2\sqrt{6}}{9}\left(\sqrt{2} + 1\right); V = \frac{16\pi R^3}{27}$

26. 1. ΔCAB vuông tại C, đường cao CH.

Do đó ta có:

$CH^2 = HA.HB = ab \Rightarrow CH = \sqrt{ab}$

Tứ giác HMCN có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. Suy ra: $MN = CH = \sqrt{ab}$



$AC^2 = AH.AB = a(a+b) \Rightarrow AC = \sqrt{a(a+b)}$

$BC^2 = BH.BA = b(a+b) \Rightarrow BC = \sqrt{b(a+b)}$

Các tam giác ABC, AHM, HBN, NMC vuông có một góc nhọn bằng nhau nên đồng dạng. Ta có: $\dfrac{S_{(AHM)}}{S_{(ABC)}} = \left(\dfrac{AH}{AB}\right)^2 = \dfrac{a^2}{(a+b)^2}$ (1)

$\dfrac{S_{(HBN)}}{S_{(AB)}} = \left(\dfrac{HB}{AB}\right)^2 = \dfrac{b^2}{(a+b)^2}$ (2); $\dfrac{S_{(MNC)}}{S_{(ABC)}} = \left(\dfrac{NM}{AB}\right)^2 = \dfrac{ab}{(a+b)^2}$ (3)

3 Từ (1) và (3) ta có: $\dfrac{S_{(AHM)}}{S_{(NMC)}} = \dfrac{a}{b}$. Từ (3) và (2), ta có: $\dfrac{S_{(NMC)}}{S_{(HBN)}} = \dfrac{a}{b}$

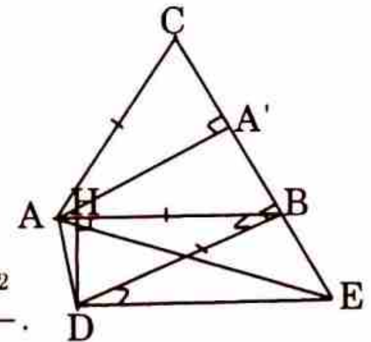
Do đó ta có: $\dfrac{S_{(AHM)}}{S_{(NMC)}} = \dfrac{S_{(NMC)}}{S_{(HBN)}}$. Vậy: diện tích ΔMNC là trung bình nhân của hình gây ra bởi hình thang vuông EMNI, ΔHME và ΔHNI

4 Khi quay quanh AB, với E và I là chân đường vuông góc hạ từ M và N đến AB. Ta có: $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.EI\left(EM^2 + IN^2 + EM.IN\right)$

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.HE.EM^2; V_3 = \dfrac{1}{3}\pi.HI.IN^2 \Rightarrow V = V_1 - (V_2 + V_3)$

Học sinh tự giải tiếp.

2'.1. Kẻ $DH \perp AB$. Tam giác vuông HDB có $\hat{B} = 30^0$ nên là nửa tam giác đều cạnh BD, đường cao BH, DH là nửa cạnh



$BH = \dfrac{BD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; DH = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2}$

Ta có: $S_{ACBD} = S_{ACB} + S_{DAB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}AB.DH$

$= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)a^2}{4}$. Vậy: $S_{ACBD} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)a^2}{4}$.

2 Ta có: $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} = \widehat{ABD} = 90^0$; $\widehat{BDE} = \widehat{DBA} = 30^0$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta BDE$ là nửa tam giác đều cạnh DE, đường cao BD = a, BE là nửa cạnh $BD = BE\sqrt{3} \Rightarrow BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CE = a + \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{(3+\sqrt{3})a}{3}$

Ta có: $S_{ACE} = \dfrac{1}{2}CE.AA' = \dfrac{1}{2}\dfrac{(3+\sqrt{3})a}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ACE} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)a^2}{4}$

3. Ta có: $S_{ACE} = S_{ACBD}$. Do đó tam giác ACE và tứ giác ACBD tương đương nhau.Ta có thể nhận được điều này mà không cần tính diện tích của tam giác ACE và tứ giác ACBD.Thật vậy, ta có:

$$S_{ACE} = S_{ACB} + S_{EAB};\ S_{ACBD} = S_{ACB} + S_{DAB}$$

Nhưng ta lại có: $S_{EAB} = S_{DAB} \Rightarrow S_{ACE} = S_{ACBD}$. (đpcm)

4. Khi quay quanh AB, ΔABD gây ra hai hình nón đỉnh A và B đường cao AH và BH có chung đáy là đường tròn bán kính HD, có thể tích theo thứ tự là: $V_1 = \frac{1}{3}\pi.HD^2.AH; V_2 = \frac{1}{3}\pi.HD^2.BH$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi.HD^2.AB = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}a = \frac{\pi a^3}{12}. \text{Vậy } V = \frac{\pi a^3}{12}$$

28. 1. $AC = R \Rightarrow AC$ chắn cung $60^0 \Rightarrow \widehat{B} = 30^0$

ΔABC vuông tại C $(AB = 2R) \Rightarrow \widehat{A} = 60^0$

2. Ta có $CA = AD = AO = R = DO/2$

ΔCDO có CA là trung tuyến bằng nửa cạnh đối nên là tam giác vuông tại C. Suy ra: $DC \perp OC$. Do đó DC tiếp xúc với đường tròn (O) tại C.

Ta có $\widehat{DCA} = \frac{1}{2}$ sđ$\overset{\frown}{CA} \Rightarrow \widehat{DCA} = 30^0$; AM là phân giác của góc $A \Rightarrow \widehat{CAM} = 90^0$.

Do đó: $\widehat{CAM} = \widehat{DCA}$. Hai góc CAM và DCA bằng nhau ở vị trí so le trong nên AM và DC song song. AM // DC mà $OC \perp DC \Rightarrow OC \perp AM$

3. Khi quay quanh AB, các tam giác vuông HBC và OHC gây ra các hình nón đỉnh B và đỉnh O, có chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính HC, đường cao BH và OH, có thể tích theo thứ tự là V_1 và V_2.

Thể tích V của hình gây ra bởi BOC quay quanh AB.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi.HC^2.BH - \frac{1}{3}\pi.HC^2.OH$$

$$= \frac{1}{3}\pi.HC^2(BH - OH) = \frac{1}{3}\pi.HC^2.BO$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2.R = \frac{\pi R^3}{4} \text{ (đvtt)}$$

29. 1. Ta có: $\widehat{BPC} = \widehat{BQC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔABC đều, $CP \perp AB$.

$\Rightarrow$ P là trung điểm của AB.

Tương tự: Q là trung điểm của AB.

Suy ra: PQ // BC $\Rightarrow \overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{CQ}$.

Do đó tứ giác BPQC là một hình thang cân.

2. Ta có: $BP = CQ = \frac{a}{2}$.

Chu vi của hình thang BPQC là: $2p = BC + PQ + BP + QC = a + \frac{a}{2} + a = \frac{5a}{2}$

Diện tích hình thang BPQC là: $S = \frac{BC + PQ}{2}PK$

Với $PK \perp BC$ và $PK = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{a + \frac{a}{2}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Vậy: $2p = \frac{5a}{2}; S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

a. Khi quay quanh BC, hình thang cân BPQC gây ra:
- Hình trụ tròn xoay đường cao KH. Hai hình nón bằng nhau đỉnh B và C, đường cao $BK = CH = \frac{a}{4}$. Bán kính đáy $R = \frac{a}{2}$. Thể tích V phải tìm là:

$$V = \pi PK^2.KH + 2.\frac{1}{3}.\pi.PK^2.BK = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}.\frac{a}{4}\right) = \frac{\pi a^3}{8}$$

Thể tích V' của hình cầu gây ra bởi nửa hình tròn (O), bán kính $OB = \frac{a}{2}$,

khi quay quanh BC là: $V' = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$. Suy ra: $\frac{V}{V'} = \frac{3}{4}$.

30. 1. Tam giác DOC vuông tại D, đường cao DH. Ta có:

$CD^2 = OC^2 - OD^2 = 9R^2 - R^2 = 8R^2 \Rightarrow CD = 2R\sqrt{2}$

$DH.OC = DO.DC \Leftrightarrow DH = \frac{DO.DC}{OC} = \frac{R.2R\sqrt{2}}{3R} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$

$CH.CO = CD^2 \Leftrightarrow CH = \frac{OD^2}{CO} = \frac{8R^2}{3R} = \frac{8R}{3}$

$OH = OC - CH = 3R - \frac{8R}{3} = \frac{R}{3}$.

2. Ta có: $CA.CB = 4R.2R = 8R^2; CH.CO = \frac{8R}{3}.3R = 8R^2$

Do đó CA.CB = CH.CO. Hệ thức này không thay đổi khi ta lấy điểm C tùy ý trên tia đối của tia BA.

Thật vậy, ta có: $\Delta CAD \sim \Delta CDB \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{CD} \Leftrightarrow CD^2 = CD.CB$ (1)

Mặt khác, ta có: $CD^2 = CH.CO$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: CA.CB = CH.CO

3. Khi cho hình vẽ quay quanh AC, ta có:

a. Tam giác CDH gây ra hình nón đỉnh C, đường cao CH, bán kính đường tròn đáy là HD, đường sinh là CD. Do đó diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi.HD.CD = \pi.\dfrac{2R\sqrt{2}}{3}.2R\sqrt{2} = \dfrac{8\pi R^2}{3}$.

b. Tam giác CDO gây ra hai hình nón theo thứ tự có đỉnh là C và O, đường cao CH và DH, bán kính đường tròn đáy chung là HD.

Do đó ta có:

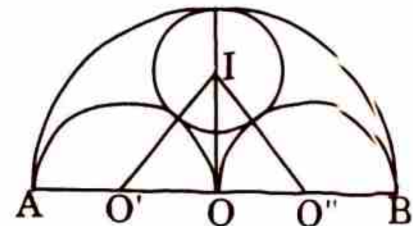
$$V = \frac{1}{3}\pi HD^2.CH + \frac{1}{3}\pi HD^2.OH = \frac{1}{3}\pi HD^2.CO = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2R\sqrt{2}}{3}\right)^2.3R \Rightarrow V = \frac{8\pi R^3}{9}$$

31. 1. Ta có: $IO' = \dfrac{R}{2} + r = IO'' \Rightarrow \Delta IO'O''$ cân tại I. Mà O là trung điểm $O'O'' \Rightarrow OI \perp O'O''$

Vậy $OI \perp AB$.

2. Đường tròn (I) tiếp xúc với (O) tại C.

Suy ra $OI = R - r$



$\Delta OIO'$ vuông tại O, ta có: $OI^2 = IO'^2 - OO'^2$

$$\Leftrightarrow (R - r)^2 = \left(\frac{R}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 + r^2 - 2Rr = \frac{R^2}{4} + Rr + r^2 - \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow r = \frac{R}{3}.$$

3. Diện tích của các nửa hình tròn (O), (O') và (O") là:

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2}; S_2 = S_3 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8}.$$

Diện tích của hình tròn (I): $S_4 = \pi\left(\dfrac{R}{3}\right)^2 = \dfrac{\pi R^2}{9}$.

Suy ra diện tích của hình (Σ) là:

$$S = S_1 - (S_2 + S_3 + S_4) = \frac{\pi R^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{9}\right) = \frac{5\pi R^2}{36}. \text{Vậy } S = \frac{5\pi R^2}{36}$$

4. Khi quay quanh AE, các nửa hình tròn (O), (O'), (O") và hình tròn (I) gây ra các hình cầu có thể tích theo thứ tự là:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi.R^3; V_2 = V_3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{R^3}{8} = \frac{\pi R^3}{6}; V_4 = \frac{4}{3}\pi.\frac{R^3}{27} = \frac{4\pi R^3}{81}$$

Do đó thể tích của mình gây ra bởi (Σ) là:

$$V = V_1 - (V_2 + V_3 + V_4) = \frac{77\pi R^3}{81}$$

32. 1. Ta có: $\widehat{MOA} = 2\widehat{MBA}$

Nhưng $\widehat{MEO} = \widehat{MOA}$. Suy ra: $\widehat{MEO} = 2\widehat{MBA}$

2. Kẻ MH ⊥ ED. Ta có: $\widehat{MBA} = 15^0$

$\Rightarrow \widehat{MEO} = 30^0$. Tam giác MEO vuông tại M (ME ⊥ MO) có $\hat{E} = 30^0$ nên là nửa tam giác đều có cạnh là EO, đường cao EM, nửa cạnh là MO = R.

Suy ra: $ME = R\sqrt{3}, EO = 2R$. ΔHEM là nửa tam giác đều, có cạnh là $EM = R\sqrt{3}$, đường cao EH.

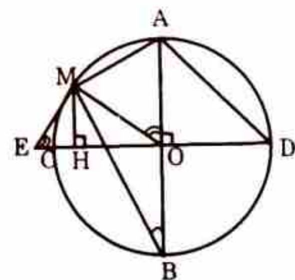
Ta có: $MH = \frac{EM}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}; EH = \frac{EM\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$

3. Khi cho hình vẽ quay quanh ED, tứ giác EMAD gây ra 3 hình sau:

Hình nón đỉnh E, đường cao EH, đường sinh EM, bán kính đáy HM, có diện tích xung quanh và thể tích là: $S_1 = \pi.R\frac{\sqrt{3}}{2}R\sqrt{3} = \frac{3\pi R^2}{2}$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi.HM^2.EH = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{3R}{2} = \frac{3\pi R^3}{8}.$$

Hình nón cụt đường cao HO, đường sinh MA, bán kính đáy là HM và OA, có diện tích xung quanh và thể tích là:



$$S_2 = \pi(HM + OA).MA = \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + R\right).\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})R}{2}$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})\pi R^2}{4} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi R^2}{4}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi.HO(HM^2 + OA^2 + HM.OA)$$

$$= \frac{1}{2}\pi.\frac{R}{2}\left(\frac{3R^2}{4} + R^2 + \frac{R^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{(7 + 2\sqrt{3})\pi R^3}{24}.$$

Hình nón đỉnh D, đường cao HDO, đường sinh DA, bán kính đáy OA, có diện tích xung quanh và thể tích là:

$$S_3 = \pi.OA.DA = \pi.R.R\sqrt{2} = \pi R^2\sqrt{2}; V_3 = \frac{1}{3}\pi.OA^2.DO = \frac{\pi R^3}{3}$$

Do đó diện tích bề mặt xung quanh và thể tích của hình gây ra bởi tứ giác EMAD khi quay quanh ED là: $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$\Rightarrow S = \frac{3\pi R^2}{2} + \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi R^2}{4} + \pi R^2\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{(6 + \sqrt{6} + 5\sqrt{2})\pi R^2}{4}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\Rightarrow V = \frac{3\pi R^3}{8} + \frac{(7 + 2\sqrt{3})\pi R^3}{24} + \frac{\pi R^3}{3} \Rightarrow V = \frac{(12 + \sqrt{3})\pi R^3}{12}$$

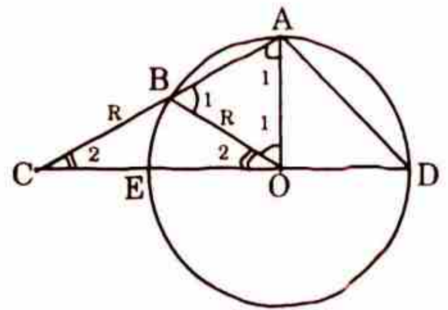
33. 1. $\widehat{AOD}$ là góc ngoài của ΔAOC. Ta có: $\widehat{AOD} = \widehat{A}_1 + \widehat{ACD}$

Nhưng $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (ΔOAB cân tại O)

$\widehat{B}_1$ là góc ngoài của ΔOBC

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{BOC} + \widehat{BCO} = 2\widehat{ACD}$ (ΔOBC cân).

Do đó: $\widehat{AOD} = 3\widehat{ACD}$



2. ***Cách 1:*** Nếu AB = R thì ΔOAB đều.

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 60^0 \Rightarrow \widehat{C} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{AOD} = 90^0 \Rightarrow$ A là trung điểm cung ED.

Cách 2: $AB = R \Rightarrow OB = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow \Delta OAC$ vuông tại $O \Rightarrow \widehat{AOD} = 90^0$

Đảo lại: Nếu $\widehat{AOD} = 90^0$ thì AB = R.

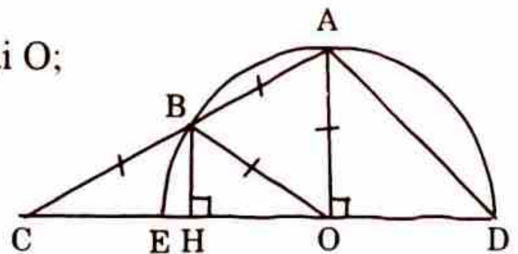
Thật vậy: $\widehat{AOD} = 90^0 \Rightarrow \Delta OAC$ vuông tại O;

ΔBOC cân tại B (OB = BC= R)

$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{O}_2$. Ta lại có:

$\widehat{C} + \widehat{A}_1 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_1 = 90^0 \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{O}_1$

$\Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow AB = R$.



3. Kẻ $BH \perp CD$.

Tứ giác OABH quay quanh CD ây ra hình nón cụt tròn xoay, đường cao OH, đáy là các đường tròn (O, OA) và (H, HB) có thể tích là:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi OH\left(OA^2 + HB^2 + OA.HB\right)$$

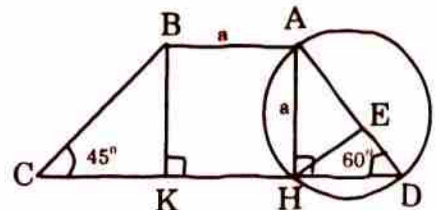
$= \dfrac{1}{2}\pi.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\left(R^2 + \dfrac{R^2}{4} + \dfrac{R^2}{2}\right) = \dfrac{7\pi R^3\sqrt{3}}{24}$; ΔOBH quay quanh CD gây ra hình nón đỉnh O, đường cao OH, đáy là đường tròn (H, HB) có thể tích là: $V_2 = \dfrac{1}{2}\pi.HB^2.OH = \dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{R^2}{4}.\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$

Thể tích V của hình gây ra bởi ΔOAB khi quay quanh CD là:

$V = V_1 - V_2 = \dfrac{7\pi R^3\sqrt{3}}{24} - \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{24} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}$

34. 1. Tam giác AHD vuông tại H, có $\widehat{D} = 60^0$ nên là nửa tam giác đều có cạnh là AD, đường cao AH và nửa cạnh là HD.

Do đó:



$AH = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AD = \dfrac{2AH}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $HD = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Kẻ $BK \perp CD \Rightarrow \Delta BKC$ vuông cân tại K. Do đó: $BC = BK\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

$CK = BK = a$. Vậy: $AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $BC = a\sqrt{2}$

Ta có: $CD = CK + KH + HD = a + a + \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{(6+\sqrt{3})a}{3}$

Diện tích của hình thang ABCD là: $S = \frac{AB + CD}{2}.AH = \frac{a + (6+\sqrt{3})\frac{a}{3}}{2}.a$

Vậy $S = \frac{(9+\sqrt{3})a^2}{6}$ (đvdt).

2. Gọi I là trung điểm của AD. Suy ra I là tâm đường tròn (I) đường kính AD. Đường tròn (I) này đi qua H, bán kính $R = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích S_0 của phần chung của hình tròn (I) và hình thang ABCD gồm 2 phần: Diện tích S_1 của tam giác vuông AHD:

$$S_1 = \frac{1}{2}AH.HD = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Diện tích S_2 của viên phân tạo bởi dây AH và cung AH:

$$S_2 = S_{quat\ IAH} - S_{\Delta IAH}.$$

Ta có: $\widehat{AIH} = 2\widehat{ADH} = 120^0 \Rightarrow S_{quat\ IAH} = \frac{\pi R^2\alpha^2}{360^0} = \frac{\pi.a^2}{9}$.

Tam giác AIH là tam giác cân đỉnh I, có diện tích bằng hiệu diện tích của tam giác vuông AHD và tam giác đều HID.

$$S_{IAH} = S_{AHD} - S_{IHD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})a^2}{36}.$$

Do đó diện tích S_o phải tìm là:

$$S_o = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} + \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})a^2}{36} = \frac{(4\pi + 3\sqrt{3})a^2}{36}$$

3. Thể tích V của hình sinh ra bởi ADH khi cho hình vẽ quay quanh AD.
Khi ADH quay quanh AD , hình tạothành là hai hình nón chung đáy , có bán kính HE , hình nón thứ nhất có đường cao AE và hình nón thứ hai có đường cao ED . Ta có $HD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Nên $HE = HD.\sin 60 = \frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$ và $ED = \frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

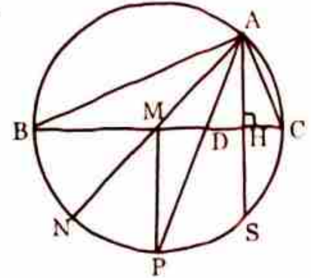
Gọi thể tích hình nón thứ nhất là V_1.

Ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi.HE^2.AE = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt).

Gọi thể tích hình nón thứ hai là V_2.

Ta có $V_2 = \frac{1}{3}\pi.HE^2.DE = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{72}$ (đvtt).

Suy ra $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$ (đvtt).



35. 1. Ta có: $\widehat{BAP} = \widehat{PAC}$ (AP là phân giác của góc $\widehat{BAC}$) $\Leftrightarrow BP = PC \Leftrightarrow$ P là điểm giữa của cung BC.
$\Leftrightarrow M\Pi \perp BC$ (M là tâm đường tròn (O)). Mà $AH \perp BC$. Do đó MP // AH.

2. Ta có: ΔMAP cân tại M (MA = MP, bán kính) $\Leftrightarrow \widehat{MAP} = \widehat{MPA}$
Nhưng $\widehat{MPA} = \widehat{PAS}$ (so le trong). Do đó: $\widehat{MAP} = \widehat{MPA} = \widehat{PAS}$

3. Theo trên, ta có: $\widehat{MAP} = \widehat{PAS}$.Suy ra: AD là phân giác của góc MAH, góc hợp bởi đường cao AH và trung tuyến AM xuất phát từ đỉnh góc vuông.

4. Khi quay quanh BC, ABH vuông tại H, gây ra hình nón tròn xoay đỉnh B, đường cao BH, đây là hình tròn bán kính HA, có thể tích là:
$V = \frac{1}{3}\pi HA^2.BH$; ΔABC vuông tại A, có $\hat{B} = 30^0$, nên là nửa tam giác đều cạnh BC = 2a, đường cao $AB = a\sqrt{3}$. ΔBAS đều, đường cao $BH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$; $HA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V$ (học sinh tự tính).

36. a. Ta có: BE = EC = 12.; AB = AC = 16, CF = CE = 12,
Do đó $AF = AC - CF = 16 - 12 = 4$. Dễ thấy OECF là tứ giác nội tiếp, để chứng tỏ BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó, ta sẽ chứng minh : $BF^2 = BE.BC$. Ta có: $BE.BC = 12.24 = 288$. (1)
Để tính BF^2, ta kẻ $FH \perp BC$ nhằm tạo ra tam giác vuông BFH.
Ta có FH // AE $\Rightarrow \frac{CH}{CE} = \frac{CF}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow CH = \frac{3}{4}CE = 9$.
Suy ra $BH = BC - HC = 24 - 9 = 15$.
Ta có $BF^2 - BH^2 = FH^2 = CF^2 - CH^2 \Rightarrow BF^2 - 15^2 = 12^2 - 9^2 \Rightarrow BF^2 = 288$.
(2) . Từ (1) và (2) suy ra $BF^2 = BE.BC$. Từ đó chứng minh được BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF, tức là đường tròn ngoại tiếp tứ giác OECF.

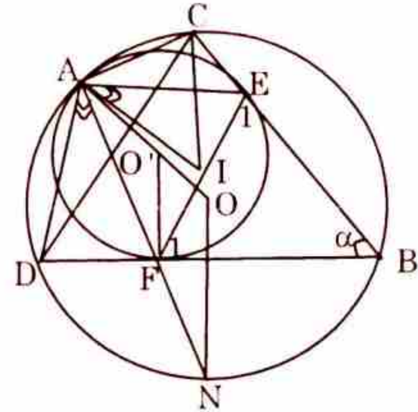
b. Từ câu a suy ra $\widehat{OFM} = \widehat{OCF} = \widehat{OCB}$, mà $\widehat{OFM} = \widehat{OMF}$ nên $\widehat{OCB} = \widehat{OMF}$,
Suy ra BMOC là tứ giác nội tiếp.

37. a. Gọi N là giao điểm của AF với đường tròn (O). Ta có $\widehat{O'FA} = \widehat{N}$ nên O'F // ON. Bạn đọc tự giải tiếp.

b. Đặt $\widehat{B} = \alpha$. Ta có: $\widehat{CAD} = 180^0 - \alpha$, $\widehat{IAD} = \widehat{IAC} = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$

Tam giác BEF cân nên $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$. Do đó $\widehat{IAD} = \widehat{IAC} = \widehat{E}_1 = \widehat{F}_1$

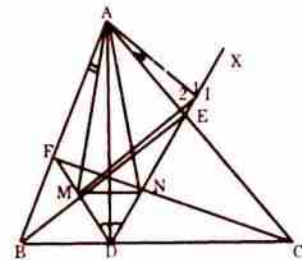
Ta lại có $\widehat{EAF} = \widehat{F}_1$ (cùng có số đo bằng nửa số đo cung EF) nên $\widehat{IAD} = \widehat{EAF}$. Cũng trừ đi $\widehat{IAF}$ được $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$.



c. Do $\widehat{IAC} = \widehat{E}_1$ nên IACE là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{IAE} = \widehat{ICE}$. Kết hợp với kết quả của câu a và câu b suy ra $\widehat{ICE} = \dfrac{1}{2}\widehat{DCB}$, do đó CI là tia phân giác của góc DCB. Tương tự DI là tia phân giác của góc CDB. Vậy I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔBCD.

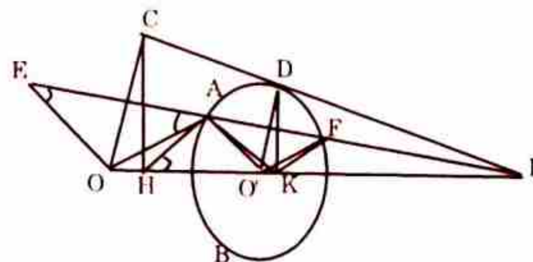
38. a. Dễ chứng minh $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ và $DA \perp MN$ nên ΔAMN tại A.

b. Ta có $\widehat{INM} = \widehat{IDB}$ (do MN // BC), $\widehat{IDB}$ bù $\widehat{BAE}$ (do ABDE là tứ giác nội tiếp), $\widehat{BAE} = \widehat{MAI}$ nên $\widehat{INM}$ bù $\widehat{MAI}$. Vậy AMNI là tứ giác nội tiếp.



c. Gọi Ix là tia đối của tia ID. Do AMNI là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{I}_1 = \widehat{AMN}$. Do AMNI là tứ giác nội tiếp và AMN cân nên: $\widehat{I}_2 = \widehat{ANM} = \widehat{AMN}$. Suy ra $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$; ΔDMI có DA là đường phân giác trong, IA là đường phân giác ngoài nên MA là đường phân giác ngoài, tức là MA là tia phân giác của góc FMI.

39. Trường hợp CD // OO', dễ chứng minh Giả sử CD cắt OO' tại I (hình bên). Gọi E, F là giao điểm của IA với (O), (O'). Ta có: $IA.IE = IC^2 = IO.IH$. Ta chứng minh được AEOH là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AHK} = \widehat{E} = \widehat{OAE}$. (1). Chứng minh tương tự AFKO' là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AKH} = \widehat{AFO'} = \widehat{O'AF}$ (2).



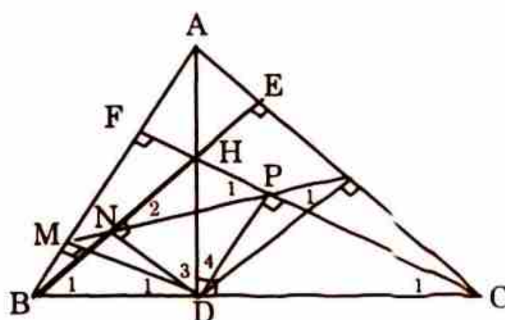
Ta lại có $\widehat{OAO'} = 180^0 - \widehat{OAE} - \widehat{O'AF}$. (3)

$\widehat{HAK} = 180^0 - \widehat{AHK} - \widehat{AKH}$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$.

40. 1 ; 2. (HS tự làm)

3. Theo chứng minh trên DNHP nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{N}_2 = \widehat{D}_4$ (nội tiếp cùng chắn cung HP); ΔHDC có $\widehat{HDC} = 90^0$ (do AH là đường cao), Δ HDP có $\widehat{HPD} = 90^0$ (do DP $\perp$ HC)



$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_4$ (cùng phụ với $\widehat{DHC}$)

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{N}_2$ (l)

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{P}_1$ (2).

Từ (l) và (2) $\Rightarrow$ ΔHNP ~ ΔHCB.

4. Theo chứng minh trên DNMB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{D}_1$ (nội tiếp cùng chắn cung BM).(3)

DM // CF (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (hai góc đồng vị).(4)

Theo chứng minh trên $\widehat{C}_1 = \widehat{N}_2$ (5). Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$ mà B, N, H thẳng hàng $\Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng. (6)

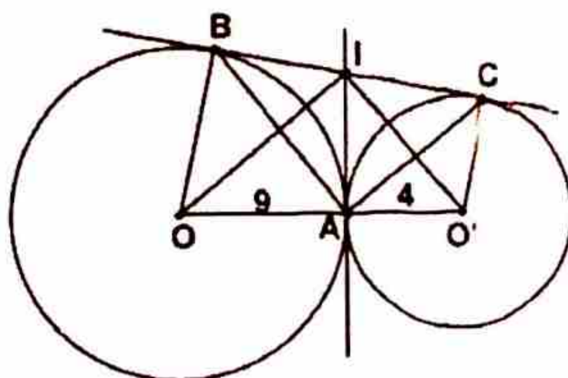
Chứng minh tương tự ta cũng có N, P, Q thẳng hàng . (7)

Từ (6), (7) $\Rightarrow$ bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng

41. 1. *(HS tự làm)*

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IB = IA, IA = IC. ΔABC có AI = BC. ΔABC vuông tại A hay $\widehat{BAC} = 90^0$.

3. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IO là tia phân giác BIA; IO' là tia phân giác góc CIA mà hai góc BIA và CIA là hai góc kề bù $\Rightarrow$ IO $\perp$ IO' $\Rightarrow \widehat{OIO'} = 90^0$



4. Theo trên ta có $\widehat{OIO'}$ vuông tại I có IA là đường cao (do AI là tiếp tuyến chung nên AI $\perp$ OO')

$\Rightarrow IA^2 = AO.AO' = 9.4 = 36 \Rightarrow IA = 6$

$\Rightarrow BC = 2.\ IA = 2.\ 6 = 12$(cm)

42. 1. (hs tự làm)

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MA = MB

$\Rightarrow$ ΔMAB cân tại M. Lại có ME là tia phân giác $\Rightarrow$ ME $\perp$ AB (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có MF $\perp$ AC (2).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta cũng có MO và MO' là tia phân giác của hai góc kề bù BMA và CMA $\Rightarrow$ MO $\perp$ MO' (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác MEAF là hình chữ nhật

3. Theo giả thiết AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

$\Rightarrow MA \perp OO' \Rightarrow \Delta MAO$ vuông tại A có $AE \perp MO$ (theo trên $ME \perp AB$)

$\Rightarrow MA^2 = ME.MO$ (4).

Tương tự ta có tam giác vuông MAO' có:

$AF \perp MO' \Rightarrow MA^2 = MF.MO'$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow ME.MO = MF.MO'$

4. Đường tròn đường kính BC có tâm là M vì theo trên $MB = MC = MA$, đường tròn này đi qua A và có MA là bán kính. Theo trên $OO' \perp MA$ tại A $\Rightarrow$ OO' là tiếp tuyến tại A của đường tròn đường kính BC.

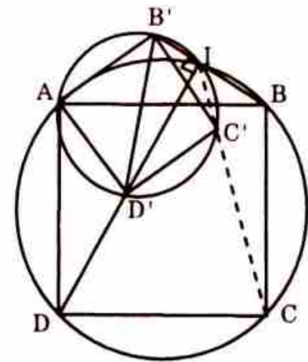
5. Gọi I là trung điểm của OO' ta có IM là đường trung bình của hình thang BCO'O $\Rightarrow$ IMIBC tại M (*) .Ta cũng chứng minh được $\widehat{OMO'}$ vuông nên M thuộc đường tròn đường kính OO'

$\Rightarrow$ IM là bán kính đường tròn đường kính OO' (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

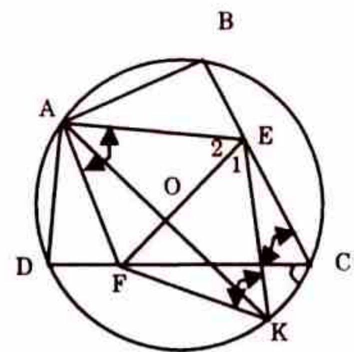
43. a. $\Delta ADD' = \Delta ABB'$ (c.g.c) nên chứng minh được: DD' BB'; $\widehat{BID} = 90^0$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

$\widehat{B'ID'} = 90^0$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông AB'C'D'.



b. Suy ra từ câu a.

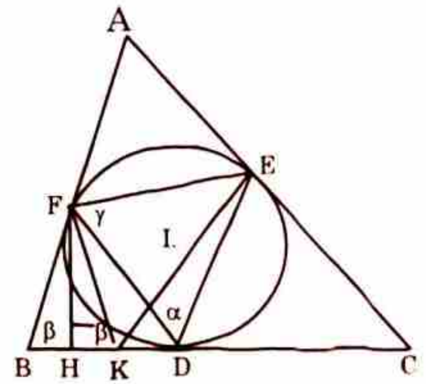
44. Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$ (cùng bù với $\widehat{BAD}$). Các đỉnh A và C lại ở hai phía của EF. Để "lật phải" nhằm sử dụng điều kiện hai góc bằng nhau, ta vẽ K đối xứng với A qua EF. Ta có $EKF = \widehat{EAF}$ (đối xứng) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF}$ $\Rightarrow$ ECKF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E}_1$. Ta lại có $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (đối xứng), $\hat{E}_2 = \widehat{DAK}$, suy ra $\hat{C}_1 = \widehat{DAK} \Rightarrow$ ADKC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow K \in (O)$.



Vậy EF là đường trung trực của dây AK, suy ra E, O, F thẳng hàng.

45. Giả sử $\hat{B} > \hat{C}$, kẻ $FH \perp BC$. Gọi K là điểm đối xứng với B qua H thì: $BH < HD$ và $\widehat{FKB} = \hat{B}$

Tứ giác DEFK có $\widehat{FKB} = \widehat{DEF}$ (bằng β) nên là tứ giác nội tiếp. Như vậy đường tròn (I) nội tiếp ΔABC có hai điểm chung phân biệt K, D với BC, vô lý. Vậy, không thể $\widehat{B} > \widehat{C}$, tương tự không thể $\widehat{B} < \widehat{C}$, do đó $\widehat{B} = \widehat{C}$. Chứng minh tương tự $\widehat{B} = \widehat{A}$. Vậy ABC là tam giác đều.



46. a. Do tính đối xứng qua OO' nên MNOO'

b. Năm điểm cùng thuộc đường tròn có đường kính O' M.

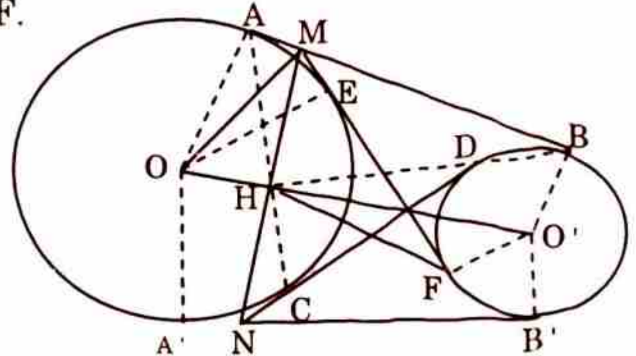
c. Năm điểm cùng thuộc đường tròn có đường kính OM.

d. Do tính đối xứng nên $\widehat{O'HD} = \widehat{O'HF}$.

Do câu b ta có $\widehat{O'HB} = \widehat{O'HF}$.

Vậy $\widehat{O'HD} = \widehat{O'HB}$.

Suy ra H, D, B thẳng hàng.



e. Do tính đối xứng $\widehat{CHN} = \widehat{EHM}$.

Do câu c ta có $\widehat{EHM} = \widehat{AHM}$.

Suy ra $\widehat{CHN} = \widehat{AHM}$.

Dễ dàng thắng minh A, H, C thẳng hàng.

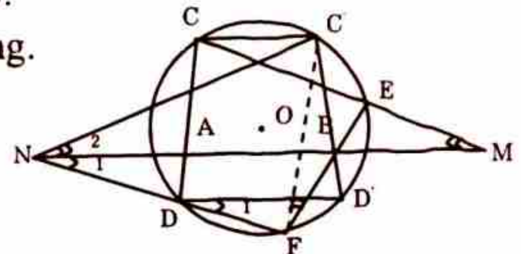
47. Kẻ các dây CC', DD', song song với AB.

Do tính đối xứng nên C', B, D' thẳng hàng.

Ta có $\widehat{N}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{FC'D'}$

$\Rightarrow$ NFBC' là tứ giác nội tiếp.

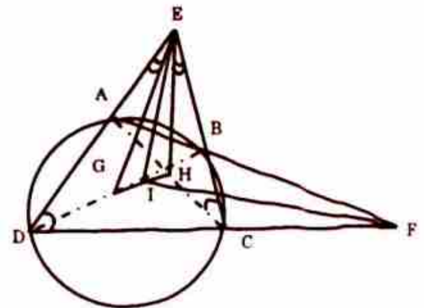
$\Rightarrow \widehat{N}_2 = \widehat{BFC'}$ (1).



Ta lại có $\widehat{BFC'} = \widehat{C'CE} = \widehat{M}$. (2).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{N}_2 = \widehat{M} \Rightarrow \widehat{CC'N} = \widehat{C'CM} \Rightarrow$ C'N đối xứng với CM qua đường trung trực của CC' $\Rightarrow$ N đối xứng với M qua đường trung trực của CC' $\Rightarrow$ AN = BM.

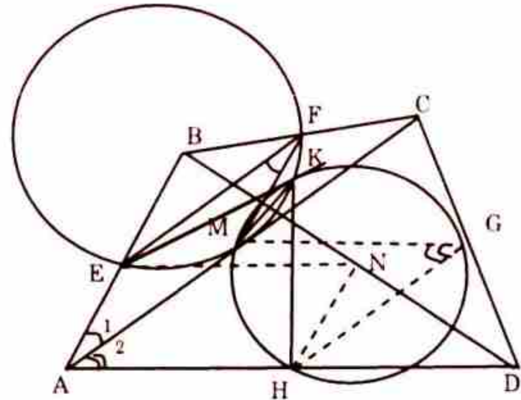
48. a. $\Delta EBD \sim \Delta EAC$ (g.g) nên tỉ số các đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng, suy ra $\dfrac{EG}{EH} = \dfrac{BD}{AC}$ (1). Hai tam giác trên đồng dạng còn suy ra $\widehat{HEC} = \widehat{GED}$, do đó tia phân giác của góc BED cũng là tia phân giác của góc GEH.



b. ΔGEH có đường phân giác EI chia GH theo tỉ số $\frac{EG}{EH}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra I chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\frac{BD}{AC}$. Chứng minh tương tự, tia phân giác của góc BFD cũng chia đoạn thẳng GH theo tỉ số $\frac{BD}{AC}$ tức là cũng đi qua điểm I.

49. Gọi E, F, G, H, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD. Vẽ đường tròn ngoại tiếp các tam giác EMF và MHG, chúng cắt nhau ở K.

Ta sẽ chứng minh rằng EHNK, FGNK là các tứ giác nội tiếp.



Ta có:

$\widehat{EKM} = \widehat{EFM} = \widehat{A}_1$,

$\widehat{MKH} = \widehat{MGH} = \widehat{A}_2$,

Suy ra $\widehat{EKM} + \widehat{MKH} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}$.

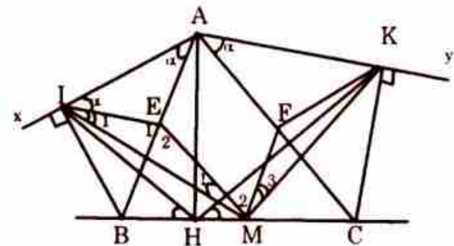
Tức là $\widehat{EKH} = \widehat{A}$. (1).

Ta lại có $\widehat{ENH} = \widehat{A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKH} = \widehat{ENH}$, do đó EHNK là tứ giác nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp ΔEHN đi qua K.

50. a. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC.

Ta có:



$IE = \frac{1}{2}AB = MF; EM = \frac{1}{2}AC = FK$

$\widehat{IEM} = \widehat{MFK}$,

Nên $\Delta IEM \sim \Delta MFK$ (c.g.c) suy ra MI = MK.

b. Ta sẽ chứng minh $\widehat{IHK} = \widehat{IMK}$.

Đặt $\widehat{BAI} = \widehat{CAK} = \alpha$.

Ta có $\widehat{BHI} = \widehat{BAI} = \alpha, \widehat{CHK} = \widehat{CAK} = \alpha$ nên $\widehat{IHK} = 180^0 - 2\alpha$ (1). Xét ΔIEM có $\widehat{E}_1 = 2\alpha$ nên $180^0 - 2\alpha = \widehat{E}_2 + \widehat{M}_1 + \widehat{I}_1$. Ta lại có $\widehat{E}_2 = \widehat{M}_2$ (so le trong, AB // MF), $\widehat{I}_1 = \widehat{M}_3$.

(do $\Delta IEM = \Delta MFK$) nên $180^0 - 2\alpha = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_1 + \widehat{M}_3 = \widehat{IMK}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{IHK} = \widehat{IMK}$. Do đó I, H, M ,K thuộc cùng một đường tròn.

7. Một số đề thi học sinh giỏi và đề tự luyện

Đề số 1

Kỳ thi chọn học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế 2004 – 2005

Bài 1: 1. Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{x}+1-2\sqrt[4]{x}}+\sqrt{\sqrt{x}+9-6\sqrt[4]{x}}=2$.

2. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số không âm và b là số trung bình cộng của a và c thì ta có: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

Bài 2: 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y=\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2y^2+3xy-2x-4y+3=0$

Bài 3: Cho đường tròn tâm O, bán kính R, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm bất kì trên cung AD. Nối EC cắt OA tại M, nối EB cắt OD tại N.

1. Chứng minh rằng tích $\frac{OM}{AM}.\frac{ON}{DN}$ là một hằng số. Suy ra giá trị nhỏ nhất của tổng $\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{DN}$, khi đó cho biết vị trí của điểm E?
2. Goi GH là dây cung cố định của đường tròn tâm O bán kính R đã cho và GH không phải là đường kính. K là điểm chuyển động trên cung lớn GH. Xác định vị trí của K để chu vi tam giác GHK lớn nhất.

Đề số 2

Kỳ thi chọn học sinh giỏi lớp 9- TP.HCM- 2007-2008

Bài 1: Cho phương trình: $2x^2-(6m-3)x-3m+1=0$ (x là ẩn số)

a. Định m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt đều âm.

b. Gọi x_1+x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Xác định m để $A=x_1{}^2+x_2{}^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2: a. Cho a, b, c, d là các số dương.

Chứng minh: $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

b. Cho $a\geq 1;\ b\geq 1$. Chứng minh: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$.

Bài 3: Giải các phương trình:

a. $(x^2-3x)^2-6(x^2-3x)-7=0$

b. $\sqrt{8+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-\sqrt{x-3}}=5$

c. $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x-x^2}=x+1$.

Bài 4: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm là H.

a. Xác định vị trí của điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A sao cho tứ giác BHCM là một hình bình hành.

b. Lấy M là điểm bất kỳ trên cung BC không chứa A. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm hai đường chéo và diện tích tam giác AOB bằng 4, diện tích tam giác COD bằng 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Đề số 3

Thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán THPT Quốc học Huế năm 2006

Bài 1:

a. Tìm các số thực u, v biết : $u^3 + v^3 = 7$ và $u \cdot v = -2$.

b. Giải phương trình : $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = 9$.

Bài 2:

Cho đường tròn (O) có đường kính BD = 2R, dây AC của (O) vuông góc với BD tại H. Gọi P, Q, R, S theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AD, CD, CB.

a. Chứng tỏ : $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$.

b. Chứng minh tứ giác PQRS là tứ giác nội tiếp .

c. Chứng minh : $PR + QS \le AB + AD$.

Bài 3:

a. Đặt $\sqrt{2} = p$; $\sqrt[3]{2} = q$. Chứng tỏ rằng : $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = p + q + \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} + 1$.

b. Chứng tỏ : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ với mọi số thực x, y, z. Suy ra với a, b, c là các số dương ta luôn có :

$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$.

c. Phân chia chín số : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 thành ba nhóm tuỳ ý, mỗi nhóm có ba số. Gọi T_1 là tích của ba số của nhóm thứ nhất, T_2 là tích của ba số của nhóm thứ hai và T_3 là tích của ba số của nhóm thứ ba. Hỏi tổng $T_1 + T_2 + T_3$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Bài 4:

Một thùng sắt đậy kín hình lập phương. Biết rằng trong thùng chứa 9 khối có dạng hình cầu cùng bán kính, làm bằng chất liệu rất rắn .

Chứng minh rằng nếu cạnh của thùng hình lập phương là a thì đường kính của các khối cầu bên trong nó nhỏ hơn hoặc bằng $(2\sqrt{3}-3)a$.

Đề số 4

Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Quốc học Huế 2008-2009

Bài 1:

a. Không sử dụng máy tính bỏ túi, hãy chứng minh đẳng thức:

$$\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}}=1$$

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x+1|+\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{(x^2+2x+1)y}=36 \end{cases}$

Bài 2: Cho phương trình: $x^4-2mx^2+2m-1=0$. Tìm giá trị m để phương trình có bốn nghiệm $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ sao cho:

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2)$

Bài 3: Cho đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là trung điểm của bán kính OB và (S) là đường tròn đường kính AC. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm tùy ý phân biệt M, N khác A và B. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của AM và AN với đường tròn (S).

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

b. Vẽ tiếp tuyến ME của (S) với E là tiếp điểm.

Chứng minh: $ME^2 = MA\ .\ MP$

c.Vẽ tiếp tuyến NF của (S) với F là tiếp điểm. Chứng minh: $\dfrac{ME}{NF}=\dfrac{AM}{AN}$.

Bài 4: Tìm số tự nhiên có 4 chữ số (viết trong hệ thập phân) sao cho hai điều kiện sau đồng thời được thoả mãn:

a. Mỗi chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

b. Tổng $p+q$ lấy giá trị nhỏ nhất, trong đó p là tỉ số của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị còn q là tỉ số của chữ số hàng nghìn và chữ số hàng trăm.

Bài 5: Một tấm bìa dạng tam giác vuông có độ dài ba cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng có thể cắt tấm bìa thành sáu phần có diện tích bằng nhau và diện tích mỗi phần là số nguyên.

Đề số 5

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ, năm 2003 – 2004

Bài 1:

a. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

b. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy - 2x - 3y + 1 = 0$.

Bài 2: Cho các số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau, thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính: $\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$.

Bài 3: a. Tìm a để phương trình $3|x| + 2ax = 3a - 1$ có nghiệm duy nhất.

b. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \le 1$ với mọi $x \in [-1;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $4a^2 + 3b^2$.

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao và m_a, m_b, m_c lần lượt là đường trung tuyến của các cạnh BC, CA, AB; R và r lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{R+r}{r}$.

Đề số 6

Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Quốc học Huế 26-6-2004

Bài 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{4x - 3 + 4\sqrt{x-1}} > \sqrt{9x + 16 - 30\sqrt{x-1}} + 2$

Bài 2: Cho hệ phương trình $\begin{cases} |x| + y = -1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình khi $m = \frac{17}{9}$

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 3: Tìm m để phương trình $(x^2 + mx + 1)^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0$ có nghiệm.

Bài 4: Từ sáu chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số mà mỗi số gồm các chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

Bài 5: Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M, tia AE và tia CD cắt nhau tại N. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại E. Gọi H là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và CEK.

a.Chứng minh ba điểm M, P, K thẳng hàng.

b.Chứng minh tứ giác APNC nội tiếp.

c.Tính góc $\widehat{MPN}$.

Đề số 7

Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong 2004-2005

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y} - \dfrac{6}{x+y} = -1 \\ \dfrac{1}{2x-y} - \dfrac{1}{x+y} = 0 \end{cases}$ (I)

Bài 2: Cho $x > 0$ thỏa $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Tính $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1$ (1)

Bài 4:

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$

b. Tìm các số nguyên x, y,z thỏa hệ $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O $(AB < BC)$. Vẽ đường tròn tâm I qua hai điểm A và C cắt đoạn AB, BC lần lượt tại M, N. Vẽ đường tròn tâm J qua ba điểm B, M, N cắt đường tròn tâm (O) tại điểm H (khác B).

a.Chứng minh OB vuông góc với MN.

b.Chứng minh IOBJ là hình bình hành.

c.Chứng minh BH vuông góc với IH.

Đề số 9

Đề thi học sinh giỏi lớp 9 TP Huế năm học 2008-2009

Bài 1: Chứng minh rằng với hai số thực bất kì a, b ta luôn có: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2: Cho ba số a, b, c không âm sao cho $a + b + c = 1$.

Chứng minh $b + c \geq 16abc$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 3: Với giá trị nào của góc nhọn α thì biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ có giá trị bé nhất? Cho biết giá trị bé nhất đó.

Bài 4: Một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 1×5. Hãy cắt tấm bìa thành các mảnh để ráp lại thành một hình vuông. Giải thích.

Đề số 10

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Lê quý Đôn Bình Định năm học 2009-2010

Bài 1: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $1 < \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$

Bài 2: Cho 3 số phân biệt m, n, p.

Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{1}{x-m} + \dfrac{1}{x-n} + \dfrac{1}{x-p} = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3: Với số tự nhiên n, $n \geq 3$.

Đặt $S_n = \dfrac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \dfrac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

Chứng minh rằng $S_n < \dfrac{1}{2}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có độ dài các cạnh BC = a, AC = b, AB = c.

E là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC. Nối AE cắt cạnh BC tại D.

a. Chứng minh: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

b. Tính độ dài đoạn AD theo a, b, c.

Bài 5. Chứng minh rằng: $\left|\dfrac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \dfrac{1}{n^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ với mọi số nguyên dương m, n.

Đề số 11

Tuyển sinh lớp 10 Chuyên Hà Nam năm học 2009-2010

Bài 1: Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2 + 3\sqrt{x} - x}{1-\sqrt{x}}$

a. Tìm điều kiện xác định của P.

b. Rút gọn P

c. Tìm x để $P > 0$.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1+\sqrt{2})x+y=\sqrt{2}\\(2+\sqrt{2})x-y=1\end{cases}$

Bài 3:

a. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y=x+6$ và parabol $y=x^2$.

b. Tìm m để đồ thị hàm số $y=(m+1)x+2m+3$ cắt trục Ox, Oy tại các điểm A và B và ΔOAB cân (đơn vị trên hai trục Ox và Oy bằng nhau)

Bài 4. Cho ΔABC vuông đỉnh A, đường cao AH, I là trung điểm của AH, K là trung điểm của HC. Đường tròn đường kính AH ký hiệu là (AH) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N

a. Chứng minh ΔABC và ΔAMN đồng dạng.

b. Chứng minh KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH)

c. Tìm trực tâm của tam giác ABK.

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}$.

Đề số 12

Đề thi học sinh giỏi lớp 9, Hải Dương năm 2004 – 2005

Bài 1:

1. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2+2004x+1=0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2+2005x+1=0$.
Tính giá trị của biểu thức $(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)$.

2. Cho a, b, c, d, là các số thực và $a^2+b^2<1$. Chứng minh rằng: phương trình $(a^2+b^2-1)x^2-2(ac+bd-1)x+c^2+d^2-1=0$ luôn có nghiệm.

Bài 2: Cho hai số tự nhiên m và n thỏa mãn $\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}$ là số nguyên.
Chứng minh rằng: ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD, lần lượt cắt (O_1) và (O_2) tại M và N. Các đường thẳng BC, BD lần lượt cắt đường thẳng MN tại P và Q; các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

1. Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD;
2. Tam giác EPQ là tam giác cân.

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\x^5+y^5=11.\end{cases}$

Đề số 13

TS lớp10 chuyên TP HCM năm 2009 – 2010

Bài 1:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (x là ẩn số).

   a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

   b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17).$$

Bài 2:

1. Thu gọn biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{45 + 27\sqrt{2}} + \sqrt{45 - 27\sqrt{2}}}{\sqrt{5 + 3\sqrt{2}} - \sqrt{5 - 3\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{3 + \sqrt{2}} + \sqrt{3 - \sqrt{2}}}{\sqrt{3 + \sqrt{2}} - \sqrt{3 - \sqrt{2}}}$

2. Cho x, y, z là ba số dương thỏa điều kiện xyz = 2. Tính giá trị của biểu thức: $B = \dfrac{x}{xy + x + 2} + \dfrac{y}{yz + y + 1} + \dfrac{2z}{zx + 2z + 2}$

Bài 3:

1. Cho ba số thực: a, b, c. Chứng minh:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

2. Chứng minh $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{2}{b} + \dfrac{8}{2a - b}$ (Với a > 0 và b < 0).

Bài 4:

1. Tìm a, b để hệ $\begin{cases} ax + by = 5 \, (1) \\ bx + ay = 5 \, (2) \end{cases}$ có nghiệm (x, y) với x, y là các số nguyên dương.

2. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{cases}$$

Bài 5: Cho tam giác ABC (AB < AC) có đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD (M, D thuộc BC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. CHứng minh BE = CF.

Bài 6: Cho ABCD là hình thoi có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và N thuộc cạnh CD sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Tính các góc của hình thoi ABCD.

Bài 7: Cho a, b là các số dương thỏa $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{2b}{1+b} = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \dfrac{1}{8}$.

Đề số 14

Đề thi học sinh giỏi lớp 9- TP Vinh- Nghệ An năm 2007 – 2008

Bài 1:

1. Cho $x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}$

Tính giá trị biểu thức: $A = (x^3 - 2x + 2)^{2008}$

2. Tìm các số nguyên a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 + c^2 + 4 < ab + 3b + 2c$.

Bài 2:

1. Chứng minh: $A = 3^8 + 3^6 + 3^{2010} A - 11$ chia hết cho 7 và 13.
2. Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7+4\sqrt{3})^3$ đằng sau dấu phẩy có ít nhất 3 chữ số 9.

Bài 3:

1. Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $\dfrac{x+2}{x-m} = \dfrac{x+1}{x-1}$.
2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Bài 4: Cho $f(x) = (1 + x + x^2)^{2007}$. Chứng minh rằng tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của x là một số chẵn và tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của x là một số lẻ.

Đề số 15

Đề thi học sinh giỏi lơp 9 TP Vinh- Nghệ An năm 2009

Bài 1:

a. Chứng minh $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 50^3$ chia hết cho 1275.

b. Tìm x, y dương thỏa mãn: $\begin{cases} x + 9y - 4xy \le 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$

Bài 2 : Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x-2}} + \sqrt{\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} - \sqrt{x-2}} = \sqrt{2}$

Bài 3:

a. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$x^5 - x^4y - 25x^3y^2 + 25x^2y^3 + 144xy^4 - 144y^5 = 77$

b. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{y\sqrt{x-5} + x\sqrt{y-7}}{2xy}$

Bài 4 : Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. P là một điểm cố định nằm giữa B và O. Một góc vuông MPN quay xung quanh đỉnh P (M, N thuộc đường tròn (O; R)). Gọi I là trung điểm của MN.

a. Chứng minh: $R^2 = IO^2 + IP^2$.

b. Tìm quỹ tích của điểm I. (thí sinh không phải làm phần đảo).

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Phân giác AD, trung tuyến BE và đường cao CF cắt nhau tại một điểm. chứng minh rằng $\widehat{BAC} > 45^0$.

Hướng dẫn và đáp số

Đề số 1

Kỳ thi chọn học sinh giỏi tỉnh Thừa Thiên Huế 2004 – 2005 (vòng 2)

Bài 1:

1.1 $\sqrt{\sqrt{x}+1-2\sqrt[4]{x}}+\sqrt{\sqrt{x}+x-6\sqrt[4]{x}}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt[4]{x}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt[4]{x}-3)^2}=2$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt[4]{x}-1\right|+\left|\sqrt[4]{x}-3\right|=2\,(1) \Leftrightarrow |y-1|+|y-3|=2(y=\sqrt[4]{x}\ge 0;x\ge 0)\,(2)$

* $0\le y\le 1: y-1\le 0, y-3\le 0$, nên $(2)\Leftrightarrow 1-y+3-y=2\Leftrightarrow y=1$ (thỏa điều kiện) $\Leftrightarrow x=1$ là một nghiệm của phương trình (1)

* $1<y\le 3: y-1>0, y-3\le 0$, nên $(2)\Leftrightarrow y-1+3-y=2\Leftrightarrow 0y=0$

Do đó phương trình (2) có vô số nghiệm y thuộc khoảng ($1<y\le 3$), suy ra phương trình (1) có vô số nghiệm x. Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là: $S=[1;81]$

1.2 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\dfrac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Ta có: $A=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$

$=\dfrac{c-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$.

Theo giả thiết $b=\dfrac{a+c}{2}\Leftrightarrow a+c=2b\Leftrightarrow b-a=c-b$, nên:

$A=\dfrac{b-a}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$

$A=\dfrac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$

$A=\dfrac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})-(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Đẳng thức (*) được nghiệm đúng.

Bài 2: .

1. $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ (xác định với mọi $x\in R$) $\Leftrightarrow (y-1)x^2-3x+y-5=0(**)$

 * $y=1$: phương trình (**) có nghiệm $x=-\dfrac{4}{3}$

 * $y\neq 1$: để phương trình (**) có nghiệm thì:

 $\Delta=9-4(y-1)(y-5)=-4y^2+24y-11\geq 0$

 $\Leftrightarrow \dfrac{25}{4}-(y-3)^2\geq 0 \Leftrightarrow y-3\leq\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}\leq y-3\leq\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq y\leq\dfrac{11}{2}(y\neq 1)$

 Vậy tập giá trị của y là $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right]$, do đó $Maxy=\dfrac{11}{2};Miny=\dfrac{1}{2}$

2. $x^2+2y^2+3xy-2x-4y+3=0\Leftrightarrow x^2+(3y-2)x+2y^2-4y+3=0(***)$

 Để phương trình (***) có nghiệm nguyên theo x, thì:

 $\Delta=(3y-2)^2-4(2y^2-4y+3)=y^2+4y-8$ là số chính phương.

 $\Leftrightarrow y^2+4y-8=k^2\,(k\in Z)\Leftrightarrow (y+2)^2-k^2=12$

 $\Leftrightarrow (y+2-k)(y+2+k)=12(a)$

 Ta có tổng: $(y+2-k)+(y+2+k)=2(k+2)$ là số chẵn, nên $(y+2-k);(y+2+k)$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Mà 12 chỉ có thể bưng tích 1.12 hoặc 2.6 hoặc 3.4, nên chỉ có các hệ phương trình sau:

 $\begin{cases}y+2-k=2\\y+2+k=6\end{cases};\begin{cases}y+2-k=6\\y+2+k=2\end{cases};\begin{cases}y+2-k=-6\\y+2+k=-2\end{cases};\begin{cases}y+2-k=-2\\y+2+k=-6\end{cases};$

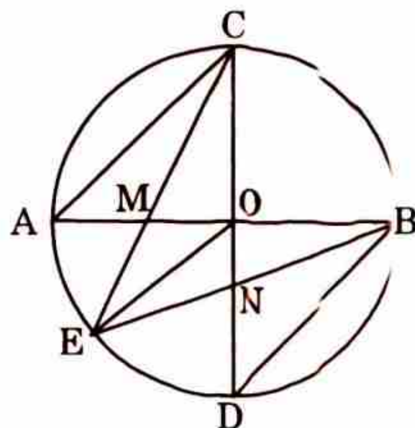
 Giải các hệ phương trình trên ta có các nghiệm nguyên của phương trình (a): $(y=2;k=2),(y=2;k=-2),(y=-6;k=2),(y=-6;k=-2)$

 Thay các giá trị $y=2;y=-6$ vào phương trình (***) và giải phương tình theo x có các nghiệm nguyên (x; y) là:

 $(x=-1;y=2),(x=-3;y=2);(x=11;y=-6);(x=9;y=-6)$

Bài 3. 3.1 Ta có: $\Delta COM\sim\Delta CED$ vì: $\hat{O}=\hat{E}=90^0;\hat{C}$ chung, suy ra:

 $\dfrac{OM}{ED}=\dfrac{CO}{CE}\Leftrightarrow OM=\dfrac{ED.CO}{CE}(1)$



 Ta có: $\Delta AMC\sim\Delta EAC$ vì:

 $\hat{C}$ chung, $\hat{A}=\hat{E}=45^0$.

 Suy ra: $\dfrac{AM}{EA}=\dfrac{AC}{EC}\Leftrightarrow AM=\dfrac{EA.AC}{CE}(2)$

 Từ (1) và (2): $\dfrac{OM}{AM}=\dfrac{OC.ED}{AC.EA}=\dfrac{ED}{\sqrt{2}EA}(3)$

$\Delta ONB \sim \Delta EAB(\hat{O} = \hat{E} = 90^0; \hat{B}$ chung $\Rightarrow \dfrac{ON}{EA} = \dfrac{OB}{EB} \Rightarrow ON = \dfrac{OB.EA}{EB}$ (4)

$\Delta DNB \sim \Delta EDB$

($\hat{B}$ chung; $\hat{D} = \hat{E} = 90^0$) $\Rightarrow \dfrac{DN}{ED} = \dfrac{DB}{EB} \Rightarrow DN = \dfrac{DB.ED}{EB}$ (5)

Từ (4) và (5): $\dfrac{ON}{DN} = \dfrac{OB.EA}{DB.ED} = \dfrac{EA}{\sqrt{2}ED}$ (6).

Từ (3) và (6): $\dfrac{OM}{AM} \cdot \dfrac{ON}{DN} = \dfrac{1}{2}$

Đặt $x = \dfrac{OM}{AM}, y = \dfrac{ON}{DN}$.

Ta có: x, y không âm và:

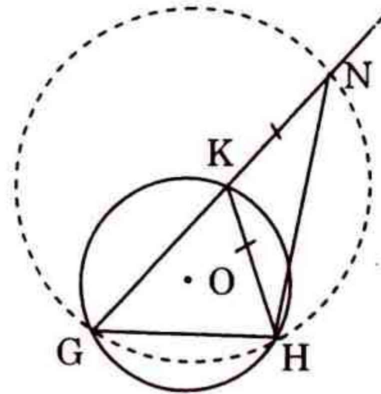
$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} x = y \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy: tổng $\left(\dfrac{OM}{AM} + \dfrac{ON}{DN}\right)_{min} = \sqrt{2}$ khi $\dfrac{OM}{AM} = \dfrac{ED}{\sqrt{2}EA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow EA = ED$

$\Leftrightarrow$ E là trung điểm của dây cung $\overset{\frown}{AD}$

3.2 ΔGKH có cạnh GH cố định, nên chu vi của nó lớn nhất khi tổng KG + KH lớn nhất. Trên tia đối của tia KG lấy điểm N sao cho KN = KH. Khi đó ΔHKN cân tại K.



Suy ra: $\widehat{GNK} = \dfrac{1}{2}\widehat{GKH}$

và KG + KH = KG + KN = GN

mà $\widehat{GKH} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{GH}$ (góc nội tiếp chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{GH}$ cố định), do đó $\widehat{GNH}$ không đổi. Vậy N chạy trên cung tròn (O') tập hợp các điểm nhìn đoạn GH dưới góc $\alpha = \dfrac{1}{4}\widehat{GOH}$ không đổi.GN là dây cung của cung tròn (O') nên GN lớn nhất khi GN là đường kính của cung tròn, suy ra ΔGHK vuông tại H, do đó $\widehat{KGH} = \widehat{KHG}$ (vì lần lượt phụ với hai góc bằng nhau). Khi đó, K là trung điểm của cung lớn GH.

Vậy: chu vi của ΔGHK lớn nhất khi K là trung điểm của cung lớn $\overset{\frown}{GH}$.

Đề số 2

Bài 1: a. $\Delta=(6m-3)^2-8(-3m+1)=(6m-1)^2 \Rightarrow x_{1;2}=\dfrac{6m-3\pm 6m-1}{4}$

$$\Rightarrow x_1=3m-1 \text{ và } x_2=-\frac{1}{2}.$$

Để hai nghiệm phân biệt đều âm thì $\begin{cases}3m-1<0\\ 3m-1\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{1}{3}\\ m\neq \dfrac{1}{6}\end{cases}$

b. Ta có $A=x_1{}^2+x_2{}^2=(3m-1)^2+\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{1}{4}$; A đạt GTNN là $\dfrac{1}{4}$ khi $m=\dfrac{1}{3}$.

Bài 2: Với a, b, c, d là các số dương, ta có: $\dfrac{a}{a+b+c}>\dfrac{a}{a+b+c+d}$

$$\frac{b}{b+c+d}>\frac{b}{a+b+c+d};\frac{c}{c+d+a}>\frac{c}{a+b+c+d};\frac{d}{d+a+b}>\frac{d}{a+b+c+d}.$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên ta được:

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}.$$

Ta lại có:

$\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+c},\ \dfrac{c}{c+d+a}<\dfrac{c}{a+c}\Rightarrow\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{c}{c+d+a}<1$. Và

$\dfrac{b}{b+c+d}<\dfrac{b}{b+d},\ \dfrac{d}{d+a+b}<\dfrac{d}{d+b}\Rightarrow\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{d}{d+a+b}<$

Từ đó ta có đpcm.

b. Ta có: $\sqrt{a-1}=\sqrt{1.(a-1)}\leq\dfrac{1+a-1}{2}=\dfrac{a}{2}$ $(a,\ b\geq 1)$.

Suy ra: $b\sqrt{a-1}\leq\dfrac{ba}{2}$ (1).

Tương tự: $a\sqrt{b-1}\leq\dfrac{ab}{2}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có đpcm.

Bài 3: a. $(x^2-3x)^2-6(x^2-3x)-7=0$. Đặt $t=x^2-3x$, ta có phương trình:

$$t^2-6t-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=7\end{array}\right.$$

Với $t=-1$, $x^2-3x=-1\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Với $t=7$, $x^2-3x=7\Leftrightarrow x^2-3x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{2}$.

b. $\sqrt{8+\sqrt{x-3}}+\sqrt{5-\sqrt{x-3}}=5$.

Đặt $u=\sqrt{8+\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow u\ge 0,\ u^2=8+\sqrt{x-3}$

Đặt $v=\sqrt{5-\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow v\ge 0,\ v^2=5-\sqrt{x-3}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u+v=5\\u^2+v^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2\\v=3\end{cases}\\ \begin{cases}u=3\\v=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Từ đó ta tìm được nghiệm $x=4$.

c. $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x-x^2}=x+1$ (Điều kiện: $0\le x\le 1$)

Ta thấy $x=0$ không thỏa nên ta chia hai vế cho $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{\frac{x+x^2}{x}}+\sqrt{\frac{x-x^2}{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét vế phải: $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 2$ và dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Ta có: $\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{2}\le\left(\sqrt{1+x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=2$

Suy ra vế trái: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 2$ và dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Vậy hai vế không bằng nhau. Phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 4: Giả sử n^2+n+1 chia hết cho 9 thì ta có:

$$n^2+n+1=k.9\ (k\in\mathbb{N}) \Leftrightarrow n^2+n+1-k.9=0\ (1)$$

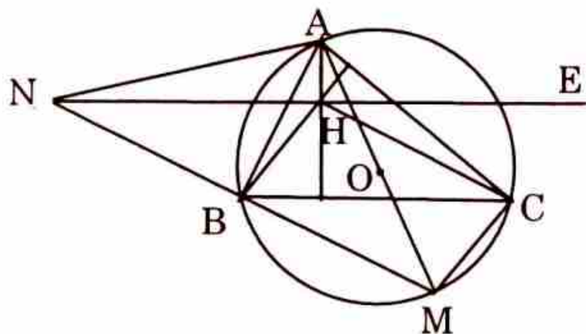
$$\Delta=1-4(1-k.9)=36k-3=3(12k-1)$$

Ta thấy Δ chia hết cho 3 và không chia hết cho 9 nên không là số chính phương, do vậy phương trình (1) trên không thể có nghiệm nguyên.

Vậy n^2+n+1 không chia hết cho 9 (đpcm).

Bài 5:

a. Gọi M_0 là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn. Ta có CM_0 // BH vì cùng $\perp$ AC.
BM_0 // CH vì cùng $\perp$ AB. Vậy tứ giác $BHCM_0$ là một hình bình hành. Điểm M_0 chính là vị trí của M mà ta cần xác định.



b. Ta có N và M đối xứng qua AB nên: $\widehat{NHB}+\widehat{EHC}=\widehat{BAC}$; H là trực tâm tam giác ABC nên:
$\widehat{AHB}+\widehat{ACB}=180^0$.

Suy ra: $\widehat{ANB}+\widehat{AHB}=180^0$. Tứ giác AHBN nội tiếp được cho ta: $\widehat{NHB}=\widehat{NAB}$. Mà $\widehat{NAB}=\widehat{MAB}$ nên $\widehat{NHB}=\widehat{MAB}$ (1).

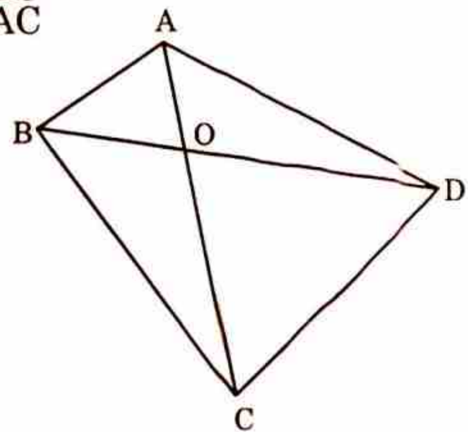
Tương tự ta cũng có: $\widehat{EHC}=\widehat{MAC}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có: $\widehat{NHB}+\widehat{EHC}=\widehat{BAC}$

Mà ta lại có: $\widehat{BAC}+\widehat{BHC}=180^0$

Nên: $\widehat{NHB}+\widehat{EHC}+\widehat{BHC}=180^0$

Vậy N, H, E thẳng hàng.



Bài 6: Đặt $S_{BOC}=x$, $S_{AOD}=y$

Ta có $\dfrac{S_{AOB}}{S_{AOD}}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{S_{BOC}}{S_{COD}}$.

Suy ra: $\dfrac{4}{y}=\dfrac{x}{9}\Rightarrow xy=36$.

Ta lại có $S_{ABCD}=4+9+x+y\ge 13+2\sqrt{xy}=13+2.6=25$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=6$

Vậy diện tích tứ giác ABCD đạt giá trị nhỏ nhất là 25.

Đề số 3

Bài 1 : a.Ta có : $u^3+v^3=7$ và $u^3\cdot v^3=-8$, suy ra u^3 và v^3 là các nghiệm của phương trình: $x^2-7x-8=0$. Do đó : $\begin{cases}u^3=-1\\v^3=8\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u^3=8\\v^3=-1\end{cases}$

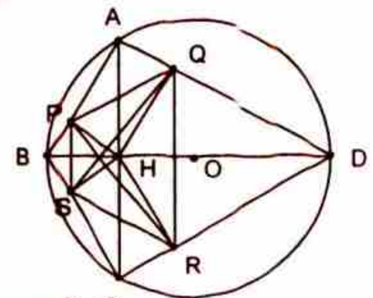
Vậy: $(u=-1;\ v=2)$ hoặc $(u=2;\ v=-1)$.

b. Viết lại : $(x-1)(x+5)(x+1)(x+3)=9$

$\Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=9$ Đặt : $t=x^2+4x$, phương trình trở thành: $(t-5)(t+3)=9$ hay: $t^2-2t-24=0$. Giải ra : $t=6$; $t=-4$

Với $t=6\Leftrightarrow x^2+4x=6$, giải ra : $x=-2\pm\sqrt{10}$ Với $t=-4\Leftrightarrow x^2+4x=-4$,giải ra : $x=-2$

Bài 2 :



a. $HA^2+HB^2 = AB^2$

$HB^2+HC^2 = BC^2$

$HC^2+HD^2 = CD^2$

$HD^2+HA^2 = DA^2$

$2(HA^2+HB^2+HC^2+HD^2) = AB^2+AD^2 + BC^2+CD^2$

$= 4R^2 + 4R^2$

Vậy : $HA^2+HB^2+HC^2+HD^2=4R^2$

b. Tứ giác HPBS nội tiếp : $\widehat{HPS}=\widehat{HBS}=\widehat{DBC}$.

HPAQ là hình chữ nhật $\widehat{HPQ} = \widehat{HAQ} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

Do đó: $\widehat{SPQ} = \widehat{HPS} + \widehat{HPQ} = 2\widehat{DBC}$. Tương tự: $\widehat{SRQ} = 2\widehat{BDC}$.

Do $\widehat{DBC} + \widehat{BDC} = 90^0$ nên $\widehat{SPQ} + \widehat{SRQ} = 180^0$

Chú ý: PQRS là hình thang cân

c. Ta có: $PR \leq HP + HR$. Gọi E là trung điểm AB, ta có: $HP \leq HE = \frac{1}{2}AB$.

Gọi F là trung điểm CD, ta có $HR \leq HF = \frac{1}{2}CD$.

Do đó: $PR \leq \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$. Tương tự: $QS \leq \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$

Mà AB = BC; AD = CD. Do đó : $PR + QS \leq AB + AD$.

Bài 3. a.Cần chứng tỏ : $\frac{1}{p-q} - \frac{1}{q} = p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1$.

Hay: $1 = (p-q)\left(p + q + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{q} + 1\right)$ (*).

Vế phải của (*) : $p^2 + pq + \frac{p^2}{q} + q + \frac{p}{q} + p - qp - q^2 - p - \frac{q^2}{p} - 1 - q$.

Do: $p^2 = 2$; $q^3 = 2$; $\frac{p^2}{q} = \frac{2}{q} = q^2$; $\frac{p}{q} = \frac{q^2}{p}$ nên (*) đúng .

Chú ý : Có thể trục căn ở mẫu của $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}}$ để chứng tỏ đẳng thức .

b. Khai triển vế phải: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ được vế trái

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geq 0$

Đặt : $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$; $x + y + z > 0$ vì a, b, c dương .

Từ đó $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ hay : $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

c. Ta có : $T_1 + T_2 + T_3 \geq 3\sqrt[3]{T_1T_2T_3}$.

$T_1.T_2.T_3 = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 72.72.70 > 71^3$

Do đó : $T_1 + T_2 + T_3 > 213$ mà : T_1, T_2, T_3 nguyên nên :

$T_1 + T_2 + T_3 \geq 214$. Ngoài ra: 214 = 72 + 72 + 70 = 1.8.9 + 3.4.6 + 2.5.7,

nên giá trị nhỏ nhất của $T_1 + T_2 + T_3$ là 214.

4. Gọi O là tâm của hình lập phương (L) đang xét. Dựng hình lập phương (L_1) có cùng tâmO, có cạnh song song với cạnh của (L) và có độ dài cạnh là a-2r, với r là bán kính của các hình cầu. **Chín tâm** của 9 hình cầu đều nằm trong (L_1) (hoặc ở trên mặt). Chia (L_1) thành **8 hình** lập phương con bởi ba mặt phẳng qua O và song song với mặt của (L_1). Phải có một hình lập phương con (L_2) trong chúng chứa ít nhất hai tâm hình cầu. Đường chéo của hình lập phương con (L_2) là : $\frac{1}{2}(a-2r)\sqrt{3}$.

Khoảng cách hai tâm hình cầu lớn hơn hoặc bằng 2r.

Vì vậy $\frac{1}{2}(a-2r)\sqrt{3} \geq 2r$ hay : $2r \leq \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2\sqrt{3}-3)a$.

Đề số 4

Bài 1:

a. $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}+1}}}$

$= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}}} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-|2\sqrt{3}-1|}}$

$= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = \sqrt{\sqrt{3}-|\sqrt{3}-1|} = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{3}+1} = 1$

b. Điều kiện: $y \geq 0$.

$\sqrt{(x^2+2x+1)y} = 36 \Leftrightarrow |x+1|\sqrt{y} = 6$

Đặt $u = |x+1|,\ v = \sqrt{y}\ (u \geq 0,\ v \geq 0)$, ta có hệ $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$

Giải ra: $u = 2,\ v = 3$ hoặc $u = 3,\ v = 2$.

Trường hợp $u = 2,\ v = 3$ có: $(x = 1;\ y = 9)$ hoặc $(x = -3;\ y = 9)$

Trường hợp $u = 3,\ v = 2$ có: $(x = 2;\ y = 4)$ hoặc $(x = -4;\ y = 4)$

Hệ đã cho có 4 nghiệm $(1;9),\ (-3;9),\ (2;4),\ (-4;4)$

Bài 2: $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$, ta có: $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ (2) $(t \geq 0)$

$\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$ với mọi m. Vậy để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) luôn có hai nghiệm dương phân biệt $t_1,\ t_2$. Tương đương với:

$\Delta' > 0,\ P = 2m - 1 > 0,\ S = 2m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2},\ m \neq 1$ (3)

Với điều kiện (3), phương trình (2) có hai nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$ và phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -\sqrt{t_2} < x_2 = -\sqrt{t_1} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}.$$

Theo giả thiết:

$x_4 - x_1 = 3(x_3 - x_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{t_2} = 6\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$ (4)

Theo định lí Viet ta có: $t_1 + t_2 = 2m$ và $t_1t_2 = 2m - 1$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $10t_1 = 2m$ và $9t_1^2 = 2m - 1$

$\Rightarrow 9m^2 - 50m + 25 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{5}{9}, m_2 = 5$.

Cả hai giá trị đều thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy để phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán thì cần và đủ là: $m = \frac{5}{9}$ và $m = 5$.

Bài 3:a. Ta có: $\widehat{CPA} = \widehat{BMA} = 90^0 \Rightarrow CP // BM$.

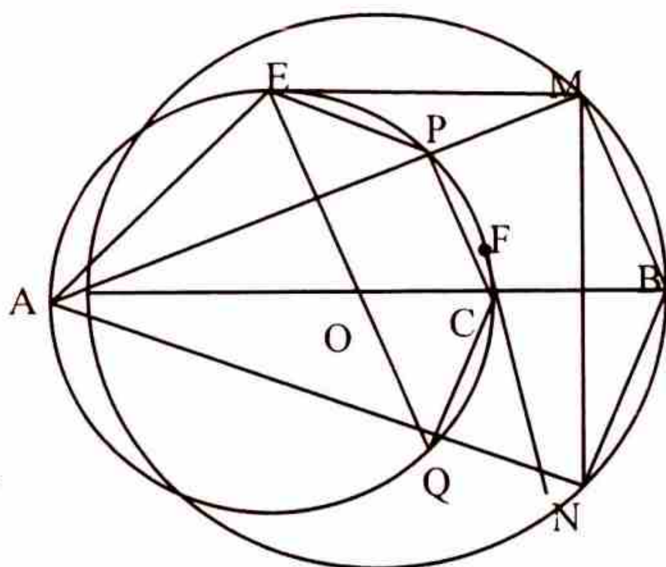
Do đó: $\frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AB}$ (1).

Tương tự: $CQ // BN$

và $\frac{AQ}{AN} = \frac{AC}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2): $\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}$.

Do đó: $PQ // MN$.



b. Hai tam giác MEP và MAE có:

$\widehat{EMP} = \widehat{AME}$ và $\widehat{PEM} = \widehat{EAM}$.

Do đó chúng đồng dạng.

Suy ra: $\frac{ME}{MA} = \frac{MP}{ME} \Rightarrow ME^2 = MA.MP$

c. Tương tự ta cũng có: $NF^2 = NQ.NA$. Do đó: $\frac{ME^2}{NF^2} = \frac{MA.MP}{NA.NQ}$

Nhưng $\frac{MP}{NQ} = \frac{MA}{NA}$ (Do $PQ // MN$). Từ đó: $\frac{ME^2}{NF^2} = \frac{AM^2}{AN^2} \Rightarrow \frac{ME}{NF} = \frac{AM}{AN}$

Bài 4: Xét số tùy ý có 4 chữ số $\overline{abcd}$ mà $1 \le a < b < c < d \le 9$ (do a, b, c, d là số nguyên).Ta tìm giá trị nhỏ nhất của $p + q = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

Do b, c là số tự nhiên nên: $c > b \Rightarrow c \ge b + 1$. Vì vậy $p + q \ge \frac{b+1}{9} + \frac{1}{b}$

$p + q \ge \frac{1}{9} + \frac{b}{9} + \frac{1}{b} \ge \frac{1}{9} + 2\sqrt{\frac{b}{9}.\frac{1}{b}} = \frac{7}{9}$

$p + q = \frac{7}{9}$ trong trường hợp $c = b + 1,\ d = 9,\ a = 1,\ \frac{b}{9} = \frac{1}{b} \Rightarrow b = 3$

Vậy số thỏa mãn các điều kiện của bài toán là: 1349

Bài 5: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác vuông ABC, c là cạnh huyền.

Ta có $a^2 + b^2 = c^2$; a, b, $c \in N^*$, diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$

Trước hết ta chứng minh ab chia hết cho 12. Chứng minh ab chia hết cho 3. Nếu cả a và b đồng thời không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ chia 3 dư 2.

Suy ra số chính phương c^2 chia 3 dư 2, vô lý.

Chứng minh ab chia hết cho 4: Nếu a, b chẵn thì ab chia hết cho 4

Nếu trong hai số a, b có số lẻ, chẳng hạn a lẻ.

Lúc đó c lẻ. Vì nếu c chẵn thì c^2 chia hết cho 4, trong lúc $a^2 + b^2$ không chia hết cho 4. Đặt $a = 2k + 1$, $c = 2h + 1$, k, $h \in N$.

Ta có: $b^2 = (2h+1)^2 - (2k+1)^2 = 4(h-k)(h+k+1)$

$$= 4(h-k)(h-k+1) + 8k(h-k) \vdots 4$$

Suy ra $b \vdots 4$

Nếu ta chia cạnh AB (chẳng hạn) thành 6 phần bằng nhau, nối các điểm chia với C thì tam giác ABC được chia thành 6 tam giác, mỗi tam giác này có diện tích bằng $\frac{ab}{12}$ là một số nguyên.

Đề số 5

Bài 1: a.Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, không chia hết cho 3.

Do đó: * $p = 2k + 1$ ($k \in Z$, $k > 1$) suy ra

$A = (p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) \Rightarrow A \vdots 8$;

* $p = 3h \pm 1$ ($h \in Z$, $h > 1$) suy ra $A \vdots 3$. Vậy $A = (p-1)(p+1) \vdots 24$.

b. Vì x = 3 không là nghiệm của phương trình đã cho nên

$(*) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3}$. Vì y là số nguyên nên $5 \vdots (x-3)$, suy ra $x - 3$ nhận các giá trị $\pm1; \pm5$. Từ đó ta xác định được hai nghiệm nguyên dương (x; y) của phương trình đã cho là (4; 7) và (8; 3)

Bài 2: Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow a + b + c = 0$ (do a, b, c đôi một khác nhau).

Suy ra

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = \frac{a(c-a)(a-b) + b(b-c)(a-b) + c(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - 2(a^3+b^3+c^3) - 3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Mặt khác $\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}$

$=\frac{-bc[(a-b)+(c-a)]+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$

Vậy $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$

Bài 3: a. $3|x|+2ax=3a-1$. (1)

* Nếu $x\geq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 3x+2ax=3a-1 \Leftrightarrow x(2a+3)=3a-1$ (2)

Với $a=\frac{3}{2}$, ta có (2) vô nghiệm.

Với $a\neq\frac{3}{2}$, nghiệm của (2) là $x_1=\frac{3a-1}{2a+3}$ và x_1 sẽ là nghiệm của (1) nếu $\frac{3a-1}{2a+3}\geq 0$.

* Nếu $x\leq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow -3x+2ax=3a-1 \Leftrightarrow x(2a-3)=3a-1$. (3)

Với $a=-\frac{3}{2}$, ta có (2) vô nghiệm;

Với $a\neq-\frac{3}{2}$, nghiệm của (2) là $x_2=\frac{3a-1}{2a-3}$ và x_2 sẽ là nghiệm của (1) nếu $\frac{3a-1}{2a-3}\leq 0$.

\+ Như vậy, (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1\geq 0\\ x_2>0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1<0\\ x_2\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1.x_2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3a-1}{2a+3}.\frac{3a-1}{2a-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3a-1)^2}{4a^2-9}\geq 0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$ hoặc $a>\frac{3}{2}$ hoặc $a<-\frac{3}{2}$.

b. Từ điều kiện $|f(x)|\leq 1$, với mọi $x\in[-1;1]$, ta có:

$|f(0)-f(1)|\leq 2\Rightarrow (a+b)^2\leq 4; |f(0)-f(-1)|\leq 2\Rightarrow (a-b)^2\leq 4$.

Mặt khác $4a^2+3b^2=2(a+b)^2+2(a-b)^2-b^2\leq 2(a+b)^2+2(a-b)^2\leq 16$

Vậy $4a^2+3b^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 khi và chỉ khi $(a;b;c)$ nhận giá trị là $(2;0;-1)$ hoặc $(-2;0;1)$.

Bài 4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

Ta có $AA_1=m_a\leq R+OA_1$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AB = AC).

$BB_1 = m_b \le R + OB_1$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AB = AC);
$CC_1 = m_c \le R + OC_1$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AB = AC).

Suy ra $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le R\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + \left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}\right)$ (1)

Ta có: $2S = (a + b + c).r \Rightarrow \frac{2S}{r} = a + b + c = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$

$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$; (2)

$2S = a.OA_1 + b.OB_1 + c.OC_1 = \frac{2S}{h_a}.OA_1 + \frac{2S}{h_b}.OB_1 + \frac{2S}{h_c}.OC_1$

$= 2S\left(\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}\right)$

$\Rightarrow \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = 1.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) và biến đổi ta được: $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{R + r}{r}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Đề số 6

Bài 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{4x - 3 + 4\sqrt{x-1}} > \sqrt{9x + 16 - 30\sqrt{x-1}} + 2$ (1). Đặt $t = \sqrt{x-1} \ge 0$ (1) trở thành: $|2t + 1| > |3t - 5| + 2$ (2)

$0 \le t \le \frac{5}{3}$: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le \frac{5}{3} \\ 2t + 1 > (5 - 3t) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le \frac{5}{3} \\ t > \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5} < t \le \frac{5}{3}$

$t > \frac{5}{3}$: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{5}{3} \\ 2t + 1 > (3t - 5) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \frac{5}{3} \\ t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < t < 4$

Kết hợp các trường hợp ta được: $\frac{6}{5} < t < 4$. Do đó: $\frac{61}{25} < x < 17$

Bài 2: a. Với $m = \frac{17}{9}$ khi đó:

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \\ (|x| + y)^2 - 2|x|y = \frac{17}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \quad (1) \\ |x|y = -\frac{4}{9} \quad (2) \end{cases}$ (II)

Nên $|x|$ và y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 + t - \frac{4}{9} = 0$ (3)

(3) có hai nghiệm: $\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(x = \frac{1}{3};\ y = -\frac{4}{3}\right), \left(x = -\frac{1}{3};\ y = -\frac{4}{3}\right)$

b. Hệ phương trình

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \\ (|x| + y)^2 - 2|x|y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + y = -1 \\ |x|y = \frac{1-m}{2} \end{cases} \quad (II)$$

Nên $|x| \geq 0$ và y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 + t + \frac{1-m}{2} = 0$ (3)

Nên (I) có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm không âm.

Trường hợp 1: (3) có nghiệm $t = 0$: khi đó $m = 1$ và (3) có 2 nghiệm 0, -1 (thỏa)

Trường hợp 2: (3) có 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương (vì $S = -1 < 0$).

Khi đó: $P = \frac{1-m}{2} < 0 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m \geq 1$.

Bài 3: $(x^2 + mx + 1)^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0$ (1)

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow (x^2 + mx + 1)^2 - x^2 + m(x^2 + mx + 1) + 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + mx + 1 - x)(x^2 + mx + 1 + x + m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + (m-1)x + 1 = 0 & (2) \\ x^2 + (m+1)x + m + 2 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Do đó: (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) hoặc (3) có nghiệm.

$$\text{Khi và chỉ khi: } \left[\begin{array}{l} \Delta_1 = (m-1)^2 - 4 \geq 0 \\ \Delta_2 = (m+1)^2 - 4(m+2) \geq 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-1)^2 \geq 4 \\ (m-1)^2 \geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 4 \Leftrightarrow |m-1| \geq 2$$

$\Leftrightarrow m \leq -1$ hay $m \geq 3$

Cách 2: Đặt: $y = x^2 + mx + 1$. Ta có:

$$\text{(1) trở thành: } \begin{cases} y^2 + my + 1 - x = 0 \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + m(x-y) + (x-y) = 0 \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+m+1) = 0 & (2) \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases}$ (*) hoặc $\begin{cases} x + y + m + 1 = 0 \\ x^2 + mx + 1 - y = 0 \end{cases}$ (**)

Giải (*): (*) có nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge 3$ (4).

Giải (**): (**) có nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + (m+1)x + m + 2 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(m+2) \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 \ge 8 \Leftrightarrow m \le 1 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m \ge 1 + 2\sqrt{2}$ (5)

Từ (4) và (5) được: (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $m \le -1$ hay $m \ge 3$.

Bài 4: Số có 4 chữ số $x_i = \overline{a_i b_i c_i d_i}$ $a_i, b_i, c_i, d_i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, $a_i \ne 0$ và a_i, b_i, c_i, d_i đôi một khác nhau. Do đó ta có số các số đó là: $5.5.4.3 = 300$ (số). Tìm tổng của 300 số trên:

$S = (a_1 + ... + a_{300}).10^3 + (b_1 + ... + b_{300}).10^2 + (c_1 + ... + c_{300}).10 + (d_1 + .. + d_{300})$

Vì số các số là bình đẳng trên từng hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn nên ta có: 300 số a_i gồm có $300 : 5 = 60$ số của mỗi loại 1, 2, 3, 4, 5 nên: $a_1 + a_2 + ... + a_{3000} = 60(1+2+3+4+5) = 900$

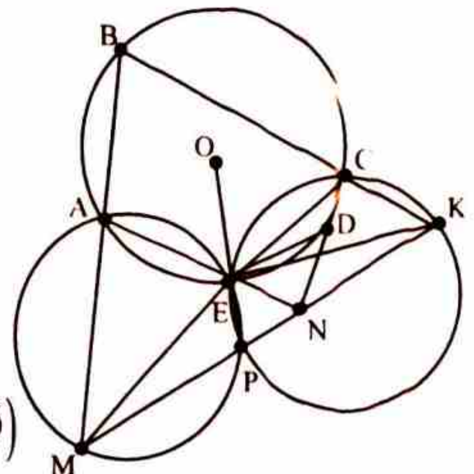
300 số b_i (tương tự c_i, d_i) gồm có $300 : 6 = 50$ số của mỗi loại 0, 1, 2, 3, 4, 5 nên: $b_1 + b_2 + ... + b_{3000} = 50(1+2+3+4+5) = 750$

Tương tự: $c_1 + c_2 + ... + c_{3000} = 750$, $d_1 + d_2 + ... + d_{3000} = 750$.

Tổng các số là: $S = 900.10^3 + 750(10^2 + 10 + 1) = 983250$

Bài 5: a. Do các tứ giác AEPM, ECKP, ABCE là các tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{MPE} + \widehat{EPK} = \widehat{BAE} + \widehat{ECB} = 2v$.



Vậy M, P, K thẳng hàng.

Do các tứ giác AEPM, ECPK, ECPK nội tiếp nên

$\widehat{APC} = \widehat{APE} + \widehat{EPC} = \widehat{AME} + \widehat{EKC}$

$\widehat{APC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overparen{BnC} + \text{sđ } \overparen{CmD} - \text{sđ } \overparen{APE}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overparen{ApE} + \text{sđ } \overparen{AqB} - \text{sđ } \overparen{ErD} - \text{sđ } \overparen{CmD}\right)$

$\widehat{APC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overparen{AqB} + \text{sđ } \overparen{BnC} - \text{sđ } \overparen{ErD}\right) = \widehat{ANC}$.

Vậy tứ giác APNC nội tiếp: $\widehat{MPA} + \widehat{APN} = \widehat{MEA} + (180^0 - \widehat{ACN}$

$\widehat{MPA} + \widehat{APN} = \widehat{MEA} + \widehat{AED} = 180^0$. Vậy $\widehat{MPN} = 180^0$.

Đề số 7

Bài 1: Điều kiện : $\begin{cases} x - 2y \neq 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2x - y} \\ v = \dfrac{1}{x + y} \end{cases}$ thì:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 6v = -1 \\ u - v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Bài 2: Vì: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 9$

$\Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 3$ (do $x > 0$)

Nên $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^4 - x^3\dfrac{1}{x} + x^2\dfrac{1}{x^2} - x\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)$

$$= 3\left[x^4 + \frac{1}{x^4} - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1\right] = 3\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 - 7 + 1\right] = 3(49 - 8) = 123$$

Bài 3: ĐK: $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{3}$.

Đặt $t = \sqrt{3x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 9 = 3x + 10$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 1}{\sqrt{t^2 + 9}} = t - 1 \Leftrightarrow (t - 1)\left(t + 1 - \sqrt{t^2 + 9}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (2) \\ t + 1 - \sqrt{t^2 + 9} = 0 & (3) \end{array}\right.$$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x + 1} = 1 \Leftrightarrow 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$(3) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 9} = t + 1 \Leftrightarrow t^2 + 9 = t^2 + 2t + 1 \Leftrightarrow t = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x + 1} = 4 \Leftrightarrow 3x + 1 = 16 \Leftrightarrow x = 5$. Vậy $(1) \Leftrightarrow x = 0$ và $x = 5$.

Bài 4: a. Ta có: $P = (2x - 3y + 8)^2 + (x - 4)^2 + 2 \geq 2$. Dấu "=" trong bất đẳng thức trên xảy ra th $\begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{16}{3} \\ x = 4 \end{cases}$. Vậy Min $P = 2$.

b. Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$

$\Leftrightarrow 3 = 27 - 3(x + y)(y + z)(z + x) \Leftrightarrow 1 = 9 - (x + y)(y + z)(z + x)$

$\Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 8 \Leftrightarrow (3 - z)(3 - y)(3 - x) = 8$

Suy ra $3-z,\ 3-y,\ 3-x$ là các ước số của 8.

Mà các ước số của 8 là $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8$

Như vậy $3-z,\ 3-y,\ 3-x$ nhận một trong các giá trị đã nêu

Lập bảng:

	-1	1	-2	2	-4	4	-8	8
$3-x$	*							
$3-y$	*							
$3-z$								*

Thử trên bảng ta được:

$\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1; \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=4\ ; \\ z=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \\ z=4 \end{cases}$

Bài 5: a. Dựng tiếp tuyến Bx tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác BAC thì $Bx \perp OB$. Ta chứng minh $Bx // MN$

Ta có: $\widehat{xBN} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O)). $\widehat{BAC} = \widehat{BNM}$ (do tứ giác AMNC nội tiếp). Suy ra: $\widehat{xBN} = \widehat{BNM}$.

Suy ra: $MN // Bx$ (đpcm)

b. Chứng minh tương tự như câu a, ta có: $BJ \perp AC$

Vì IJ là đường nối tâm của (I) và (J) nên $IJ \perp MN$

Vì $\begin{cases} OB \perp MN \\ IJ \perp MN \end{cases} \Rightarrow OB // IJ$ (1). Chứng minh tương tự ta có $OI // BJ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra IOBJ là hình bình hành.

c. Gọi F là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành IOBJ thì F là trung điểm BI và $F \in OJ$. Vì BH là dây chung và OJ là đường nối tâm của (O) và (J) nên OJ là trung trực của BH $\Rightarrow$ OJ cắt BH tại trung điểm E của BH $\Rightarrow$ $EF // BH$. Vì EF là đường trung bình của tam giác BHI nên $EF // HI$. Suy ra $HI \perp BH$ (đpcm).

Đề số 8

Bài 1: a. $\Delta = (6m-3)^2 - 8(-3m+1) = (6m-1)^2 \Rightarrow x_{1;2} = \dfrac{6m-3 \pm 6m-1}{4}$

$\Rightarrow x_1 = 3m-1$ và $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Để hai nghiệm phân biệt đều âm thì $\begin{cases} 3m-1<0 \\ 3m-1 \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{3} \\ m \neq \dfrac{1}{6} \end{cases}$

b. Ta có $A = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = (3m-1)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

A đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{4}$ khi $m = \frac{1}{3}$.

Bài 2 a. Với a, b, c, d là các số dương, ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}, \frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}, \frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên ta được:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}.$$

Ta lại có: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}, \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} + \frac{c}{c+d+a} < 1$

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}, \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b} \Rightarrow \frac{b}{b+c+d} + \frac{d}{d+a+b} < 1$$

Từ đó ta có đpcm.

b. Ta có: $\sqrt{a-1} = \sqrt{1.(a-1)} \leq \frac{1+a-1}{2} = \frac{a}{2}$ $(a,\ b \geq 1)$

Suy ra: $b\sqrt{a-1} \leq \frac{ba}{2}$ (1). Tương tự: $a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có đpcm.

Bài 3: Giả sử $n^2 + n + 1$ chia hết cho 9 thì ta có:

$n\ \ + n + 1 = k.9\ (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow n^2 + n + 1 - k.9 = 0$ (1)

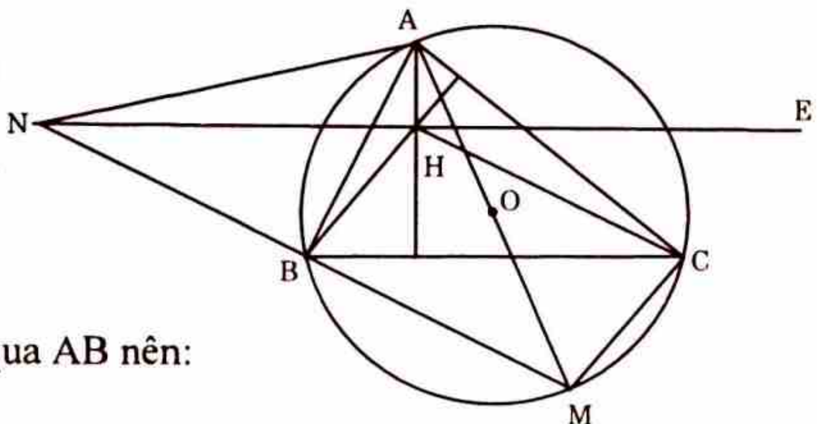
$\Delta = 1 - 4(1 - k.9) = 36k - 3 = 3(12k - 1)$.

Ta thấy Δ chia hết cho 3 và không chia hết cho 9 nên không là số chính phương, do vậy phương trình (1) trên không thể có nghiệm nguyên.

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9 (đpcm).

Bài 4: a. Gọi M_o là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn.

Ta có CM_o // BH vì cùng vuông góc với AC; BM_o // CH vì cùng vuông góc với AB. Vậy tứ giác $BHCM_o$ là một hình bình hành. Điểm M_o chính là vị trí của M mà ta cần xác định.



b. Ta có N và M đối xứng qua AB nên:

$\widehat{NHB} + \widehat{EHC} = \widehat{BAC}$

H là trực tâm tam giác ABC nên: $\widehat{AHB} + \widehat{ACB} = 180^0$

Suy ra: $\widehat{ANB} + \widehat{AHB} = 180^0$. Tứ giác AHBN nội tiếp được cho ta:

$\widehat{NHB} = \widehat{NAB}$. Mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAB}$ nên $\widehat{NHB} = \widehat{MAB}$ (1)

Tương tự ta cũng có: $\widehat{EHC} = \widehat{MAC}$ (2).

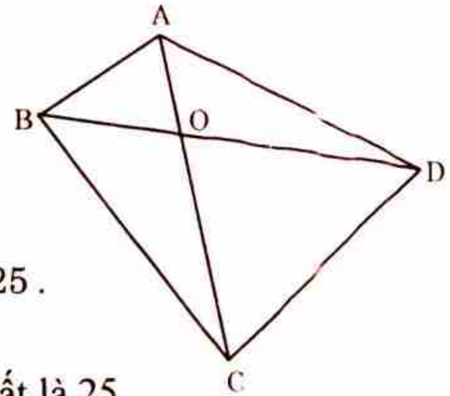
Cộng (1) và (2) ta có: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} = \widehat{BAC}$.

Mà ta lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$

Nên: $\widehat{NHB} + \widehat{EHC} + \widehat{BHC} = 180^0$.

Vậy N, H, E thẳng hàng.

Bài 6: Đặt $S_{BOC} = x$, $S_{AOD} = y$



Ta có $\dfrac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{S_{BOC}}{S_{COD}}$

Suy ra: $\dfrac{4}{y} = \dfrac{x}{9} \Rightarrow xy = 36$.

Ta lại có

$S_{ABCD} = 4 + 9 + x + y \ge 13 + 2\sqrt{xy} = 13 + 2.6 = 25$.

Dấu " = " xảy ra khi $x = y = 6$.

Vậy diện tích tứ giác ABCD đạt giá trị nhỏ nhất là 25.

Đề số 9

Bài 1. Ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \ge 0, \forall a, b \in R$$

Vậy $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab, \forall a, b \in R \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab, \forall a, b \in R$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b.

Bài 2. Ta có: $(a+b+c)^2 = \left[a + (b+c)^2\right] \ge 4a(b+c)$

Mà $a + b + c = 1$ (giả thiết). Nên: $1 \ge 4a(b+c) \Leftrightarrow b + c \ge 4a(b+c)^2$ (vì a, b, c không âm nên b + c không âm). Nhưng: $(b+c)^2 \ge 4bc$ (không âm).

Suy ra: $b + c \ge 16abc$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a = b + c \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = \dfrac{1}{4}; a = \dfrac{1}{2}$.

Bài 3. Ta có: $P = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3$

$P = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\left[\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right]$

$P = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Ta có:

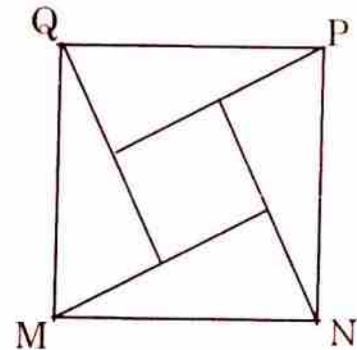
$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 \ge 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha \Leftrightarrow 1 \ge 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos^2\alpha \le \frac{1}{4}$

Suy ra: $P = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \ge 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Do đó: $P_{min} = \frac{1}{4}$ khi và chỉ khi:

$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha$ (vì α là góc nhọn)

$\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

Bài 4. Tấm bìa hình chữ nhật 1 x 5 có diện tích là 5(đvdt). Để cắt hình chữ nhật thành các mảnh ráp thành hình vuông, thì cạnh của hình vuông bằng $\sqrt{5}$, bằng độ dài cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông có kích thước là 1 và 2 có diện tích bằng 1 (đvdt). + Do đó nếu cắt hình chữ nhật 1 x 5 theo đường chéo của 2 hình chữ nhật AEFD và GBCH, và cắt theo 2 đường EF và GH xong ráp lại thì được hình vuông MNPQ như hình bên.



Đề số 10

Bài 1: Chứng minh $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác). Ta có: $\frac{m}{n} < \frac{m+k}{n+k}$, (với $0 < m < m, \forall k > 0$) (1)

Thật vậy.

$(1) \Leftrightarrow 0 < m(n+k) < n(m+k) \Leftrightarrow 0 < mk < nk \Leftrightarrow 0 < m < n\,(0 < m, n, k)$

Áp dụng: $0 < a < b + c \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$

$0 < b < c + a \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}; 0 < c < a + b \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$.

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên:

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$ (2)

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9\,(x, y, z > 0)$

Ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \ge 9$

Thay $\mathbf{x} = a + b, y = b + c, z = c + a$ vào (2):

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{c}{a+b}\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}>1(3).$$

Từ (2) (3) suy ra: $1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

Bài 2: Phương trình $\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-p}=0$ (1)

Điều kiện xác định của phương trình: $x\ne m,n,p$.

Biến đổi phương trình tương đương:

$(1)\Leftrightarrow (x-n)(x-p)+(x-m)(x-p)+(x-m)(x-n)=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x(m+n+p)+mn+np+mp=0$

$\Delta'=(m+n+p)^2-3(mn+np+mp)=m^2+n^2+p^2-mn-np-mp$

$\frac{1}{2}\left[(m-n)^2+(n-p)^2+(m-p)^2\right]>0(\text{vì } m\ne n\ne p)$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 3:Ta có bất đẳng thức: $2n+1>2\sqrt{n(n+1)}$

$\Leftrightarrow (2n+1)^2>4n(n+1)\Leftrightarrow 4n^2+4n+1>4n^2+4n$: BĐT đúng

Do đó: $\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}<\frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)\sqrt{n(n+1)}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right](1).$$

Cho n lần lượt lấy các giá trị từ 1 đến n, thay vào (1), rồi cộng vế theo vế các bất đẳng thức tương ứng, ta được:

$$S_n=\frac{1}{3(1+\sqrt{2})}+\frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+...+\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\frac{1}{2}$$

Bài 4: a) Xét hai tam giác ABD và AEC, ta có: $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ (AD là phân giác góc A); $\widehat{ABD}=\widehat{AEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó $\Delta ABD\sim\Delta AEC$(g.g). Suy ra $\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}\Leftrightarrow AD.AE=AB.AC$

Mặt khác $\Delta ABD\sim\Delta CED$(g.g) nên

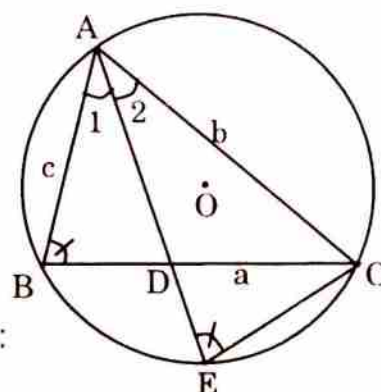
$\frac{BD}{DE} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow BD.DC = DA.DE$

Từ đó:

$AB.AC - BD.DC = AD.AE - DA.DE$

$= AD(AE - DE) = AD^2$

Vậy $AD^2 = AB.AC - DB.DC$ (1)



b) Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{c + b} = \frac{BC}{c + b} = \frac{a}{c + b}$$

Suy ra $\frac{DB}{c}.\frac{DC}{b} = \frac{DB.DC}{bc} = \left(\frac{a}{b + c}\right)^2 \Rightarrow DB.DC = \left(\frac{a}{b + c}\right)^2.bc$ (2)

Thay (2) vào (1), ta có:

$$AD^2 = bc - \left(\frac{a}{b + c}\right)^2.bc = bc\left(1 - \frac{a}{b + c}\right)\left(1 + \frac{a}{b + c}\right) = bc.\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{(b + c)^2}$$

Vậy $AD = \frac{\sqrt{bc(b + c - a)(b + c + a)}}{b + c}$

Bài 5: Trước hết, ta cần chứng minh $\left|\frac{1}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall n \in N^*$ (1).

Vì $\forall n \in N^*$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{n^2}$ (2). Đặt $t = \frac{1}{n}(0 < t \leq 1)$, ta có:

$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 + t - \sqrt{2} \leq 0(\forall t : 0 < t \leq 1)$ (3)

Biến đổi tương đương:

$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + (\sqrt{3} - \sqrt{2})t + t - \sqrt{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - \sqrt{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)t - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{2})t(t - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)(t - 1) + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 \leq 0$ (vì $0 < t \leq 1$ nên $t(t - 1) \leq 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} \leq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$: Bất đẳng thức đúng. Do đó bất đẳng thức (2) đúng.

Vì $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \left|\frac{1}{n} - \sqrt{2}\right|, \forall m \in N^*$, nên $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in N^*$

Vậy $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}, \forall m, n \in N^*$

Nhận xét: Dấu "=" trong bất đẳng thức không xảy ra.

Đề số 11

Bài 1: a.P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

b. Rút gọn P:

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{1-x} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2+3\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{x-4\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})} + \frac{-\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} = \frac{4}{(1-\sqrt{x})}$$

c) $P > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{(1-\sqrt{x})} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 \\ x \neq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 > x \geq 0$

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ (2+\sqrt{2})x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+2\sqrt{2})x = \sqrt{2}-1 \\ (1+\sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}-1 \\ (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) + y = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}-1 \\ y = \sqrt{2}-1 \end{cases}$

Bài 3: 1) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng y = x + 6 và parabol $y = x^2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 = x + 6$ hay $x^2 - x - 6 = 0$.

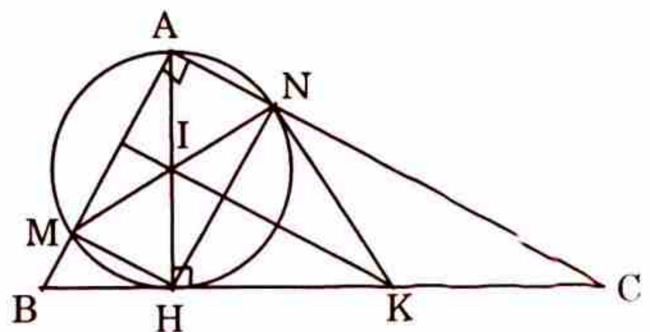
Giải phương trình ta có $x_1 = -2; x_2 = 3$ suy ra tung độ giao điểm tương ứng là $y_1 = 4; y_2 = 9$ nên tọa độ các giao điểm là: $A(-2;4), B(3;9)$

2) Đồ thị hàm số $y = (m+1)x + 2m + 3$ cắt trục Oy tại các điểm B(0; 2m + 3) và cắt trục Ox tại điểm $A\left(-\dfrac{2m+3}{m+1};0\right)$ với $m \neq -1$.

Để ΔOAB cân thì

$OA = OB \Leftrightarrow \left|-\dfrac{2m+3}{m+1}\right| = 2m+3$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2m+3|}{|m+1|} = |2m+3|$



1) $2m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$ khi đó

$A \equiv B \equiv 0$ không tồn tại ΔOAB

2) $\frac{1}{|m+1|} = 1$

a) $m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$

b) $m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$. Vậy $m = 0$; $m = -2$ là giá trị cần tìm

Bài 4. a) $AH \perp BC(gt)$; $\widehat{HMA} = \widehat{HNA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Áp dụng hệ thức canh và đường cao trong tam giác vuông. Trong ΔAHB và ΔAHC có $AH^2 = AM.AB = AN.AC$

Suy ra: $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ lại có góc A chung nên $\Delta ACB \sim \Delta AMN(c.g.c)$

b) I là trung điểm của AH nên I là tâm của đường tròn (AH)

$\Rightarrow IM = IH$; ΔHNC vuông tại N có K là trung điểm của HC

$\Rightarrow KH = KC = KN$. Lại có KI chung nên $\Delta KNI = \Delta KHI(c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{KHI}$ mà $\widehat{KHI} = 90^0$ nên $\widehat{KNI} = 90^0$ hay KN là tiếp tuyến của đường tròn (AH).

c) Trong tam giác AHC có KI là đường trung bình nên KI // AC mà $AC \perp AB \Rightarrow KI \perp AB$; mặt khác AHKB nên I là trực tâm của ΔKAB.

Bài 5: Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki ta có :

$$P = \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}\right).(x + y + z)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{16x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{4y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right).\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z}\right)^2\right)$$

$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{16x}}.\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{4y}}.\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{z}}.\sqrt{z}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

Vậy $P_{min} = \frac{49}{16}$ khi đó $\frac{1}{\sqrt{16x}} : \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{4y}} : \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{z}} : \sqrt{z}$ và $x + y + z = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$.

Đề số 12

Bài 1. 1.Theo định lý Vi-ét ta có:

$x_1 + x_2 = -2004; x_3 + x_4 = -2005; x_1x_2 = x_3x_4 = 1$, mặt khác:

$(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$

$= (x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + x_3^2)(x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_4^2)$

$= (1 - 2004x_3 + x_3^2)(1 + 2004x_4 + x_4^2)$

$= (x_3^2 + 2005x_3 + 1 - 4009x_3)(x_4^2 + 2005x_4 + 1 - x_4)$

$= (-4009x_3)(-x_4) = 4009x_3x_4 = 4009$ (do x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2005x + 1 = 0$).

2. Phương trình $(a^2 + b^2 - 1)x^2 - 2(ac + bd - 1)x + c^2 + d^2 - 1 = 0$ luôn có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (ac + bd - 1)^2 - (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (ac + bd - 1)^2 \geq (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1)$ (*)

Do $a^2 + b^2 < 1$ nên: nếu $c^2 + d^2 \geq 1$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Nếu $c^2 + d^2 < 1$, đặt $u = 1 - a^2 - b^2$ và $v = 1 - c^2 - d^2$ $(0 < u \leq 1$ và $0 < v \leq 1)$.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (1 - ac - bd)^2 \geq (1 - a^2 - b^2)(1 - c^2 - d^2) \Leftrightarrow (2 - 2ac - 2bd)^2 \geq 4uv$

$\Leftrightarrow ((a^2 + b^2 + u) + (c^2 + d^2 + v) - 2ac - 2bd)^2 \geq 4uv$

(do $a^2 + b^2 + u = c^2 + d^2 + v = 1$) $\Leftrightarrow ((a - c)^2 + (b - d)^2 + u + v)^2 \geq 4uv$.

Là bất đẳng thức đúng vì $((a - c)^2 + (b - d)^2 + u + v)^2 \geq (u + v)^2 \geq 4uv$ với mọi a, b, c, d và với mọi u, v dương. Vậy (*) là bất đẳng thức đúng, phương trình (*) luôn có nghiệm.

Bài 2. Gọi d là UCLN(m, n) suy ra m^2, n^2, mn cùng chia hết cho d^2

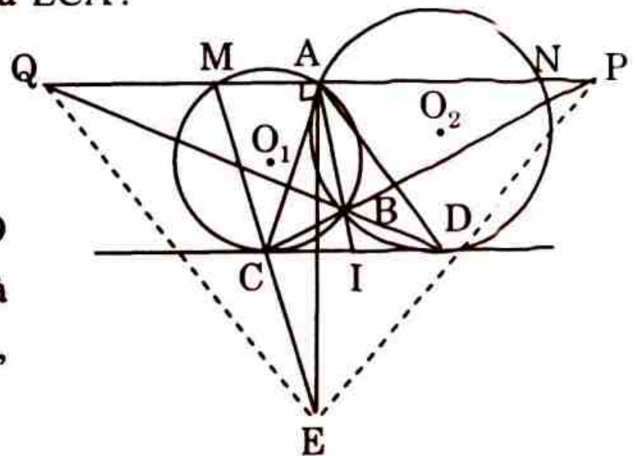
Do $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} = \frac{m^2 + n^2 + m + n}{mn}$ là số nguyên nên $m^2 + n^2 + m + n$ cũng chia hết cho d^2.

Suy ra m + n chia hết cho $d^2 \Rightarrow m + n \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{m + n} \geq d$.

Bài 3: 1. Do MN // CD nên $\widehat{EDC} = \widehat{ENA}$, mặt khác $\widehat{CDA} = \widehat{DNA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DA}$), suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{CDA}$ hay CD là phân giác của $\widehat{EDA}$.

Tương tự, CD cũng là phân giác của $\widehat{ECA}$.

Suy ra A và E đối xứng nhau qua CD (các bạn tự chứng minh) $\Rightarrow$ AE $\perp$ CD. (*)



2. Do PQ // CD nên AE $\perp$ PQ.

Gọi I là giao điểm của AB và CD thì $\Delta AID \sim \Delta DIB$ (chung $\widehat{AID}$ và $\widehat{IAD} = \widehat{IDB}$ do cùng chắn $\overset{\frown}{DB}$), suy ra $\frac{ID}{IA} = \frac{IB}{ID} \Rightarrow ID^2 = IA.IB$.

Tương tự, $IC^2 = IA.IB$, suy ra $IC^2 = ID^2 \Rightarrow IC = ID$.

Ta có AI, CP, DQ đồng quy tại B, PQ // CD và I là trung điểm của CD, A thuộc PQ suy ra A là trung điểm của PQ. Kết hợp với (*)suy ra AE là trung trực của PQ và EPQ là tam giác cân tại E.

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^5 + y^5 = 11. \end{cases}$

Vì $x + y = 1$, ta có: $x^5 + y^5 = (x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5) - (x^2y^3 + x^3y^2)$

$= (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2) - x^2y^2$

$= ((x + y)^2 - 3xy)((x + y)^2 - 2xy) - x^2y^2 = 5(xy)^2 - 5xy + 1 = 11.$

Do đó $x^5 + y^5 = 11 \Leftrightarrow 5(xy)^2 - 5xy - 10 = 0 \Leftrightarrow (xy)^2 - xy - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = -1 \\ xy = 2. \end{array}\right.$

Suy ra hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ hay x, y là nghiệm của hai phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ và $t^2 - t + 2 = 0$.

Phương trình $t^2 - t + 2 = 0$ vô nghiệm; phương trình $t^2 - t - 1 = 0$ có hai nghiệm là $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x; y) là:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Đề số 13

Bài 1. 1. $\begin{cases} x - y - xy = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - y) + 1 - y = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(1 - y) = 0 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y = 1 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$ hay

$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \vee y = -2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \vee x = 2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm là $(-1;1), (-1;-2), (2;1)$

2. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 16 + 5m^2 = 0$ (1) (x là ẩn số).

a. Tìm m để phương trình có nghiệm. Ta có: $\Delta' = 16 - 4m^2$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

b. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 5m^2 - 16$.

Do đó $A = x_1(5x_1 + 3x_2 - 17) + x_2(5x_2 + 3x_1 - 17)$

$= 5(x_1^2 + x_2^2) + 6x_1x_2 - 17(x_1 + x_2) = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + 6x_1x_2 - 17(x_1 + x_2)$

$= 5(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 17(x_1 + x_2) = 20m^2 - 4(5m^2 - 16) - 17.2m = -34m + 64$

Vì $-2 \leq m \leq 2$ nên $-4 \leq A \leq 132$.

Khi m = 2 thì A = –4 và khi m = –2 thì A = 132.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là – 4 và giá trị lớn nhất của A là 132

Bài2 1. Thu gọn biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{45+27\sqrt{2}}+\sqrt{45-27\sqrt{2}}}{\sqrt{5+3\sqrt{2}}-\sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}}$$

Ta có: $\sqrt{45+27\sqrt{2}}+\sqrt{45-27\sqrt{2}} = 3(\sqrt{5+3\sqrt{2}}+\sqrt{5-3\sqrt{2}})$

Do đó: $A = \dfrac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}}+\sqrt{5-3\sqrt{2}})}{\sqrt{5+3\sqrt{2}}-\sqrt{5-3\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

$$= \frac{3(\sqrt{5+3\sqrt{2}}+\sqrt{5-3\sqrt{2}})^2}{6\sqrt{2}} - \frac{(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}})^2}{2\sqrt{2}} = \frac{10+2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{6+2\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2. Cho x, y, z là ba số dương thỏa điều kiện xyz = 2.

Ta có: $B = \dfrac{x}{xy+x+2} + \dfrac{xy}{xyz+xy+x} + \dfrac{2xyz}{xyzx+2xyz+2xy}$

$$= \frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{2+xy+x} + \frac{2.2}{2x+2.2+2xy}$$

$$= \frac{x}{xy+x+2} + \frac{xy}{2+xy+x} + \frac{2}{x+2+xy} = \frac{x+xy+2}{xy+x+2} = 1.$$

Bài3 1. Cho ba số thực a, b, c. Ta có:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca+\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2bc+2ca+\frac{(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \ge \frac{(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge \frac{(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2(c-a)^2}{2009}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(a-b)^2}{13}+\frac{2(b-c)^2}{3}+\frac{2007(c-a)^2}{2009} \ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

2. Ta có:

$$\frac{1}{a} \ge \frac{2}{b}+\frac{8}{2a-b} \Leftrightarrow \frac{1}{a}-\frac{2}{b}-\frac{8}{2a-b} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{b-2a}{ab}-\frac{8}{2a-b} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-(b-2a)^2-8}{ab(2a-b)} \ge 0$$

(đúng vì tử luôn âm và mẫu cũng luôn âm, do a > 0 và b < 0).

Bài 4: 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 5 (1) \\ bx + ay = 5 (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) ta được $(a - b)(x - y) = 0 \Leftrightarrow x = y (\text{do } a \neq b)$

Thay vào (1) ta được: $x = \dfrac{5}{a+b} \Rightarrow y = \dfrac{5}{a+b}$. Do x là số nguyên và a, b nguyên dương nên a + b là ước nguyên dương ≥ 2 của 5.

Suy ra $a + b = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 3y^2 - z^2 = 31 (1) \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \quad (2) \end{cases}$ (*) .Giả sử rằng tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa (*). Nhân hai vế của (1) với 8 rồi cộng vào (2) ta được:

$9x^2 - 23xy + 24y^2 = 348 \Leftrightarrow 5(2x^2 - 5xy + 5y^2) = (x - y)^2 + 348 (3)$

Ta có: * $5(2x^2 - 5x + 5y^2)$ chia hết cho 5;

* $(x - y)^2$ chia cho 5 hoặc dư 0, hoặc dư 1 hoặc dư 4;348 chia 5 dư 3.

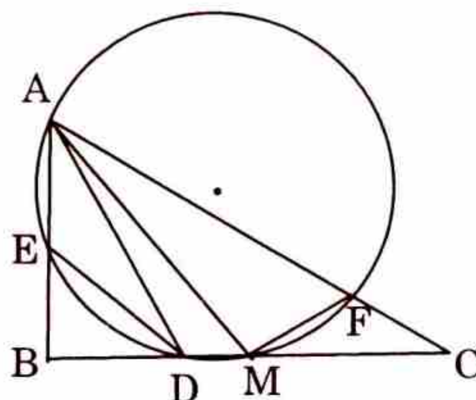
Suy ra: * Vế trái của (3) chia hết cho 5 (4)

* Vế phải của (3) chia hết cho 5 có dư hoặc là 3, hoặc là 4 hoặc là 2 (5). Từ (4) và (5) suy ra mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa hệ (*).

Bài 5 : Ta có: $\Delta CFM \sim \Delta CDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CF}{CM} = \dfrac{CD}{CA}$ (1)



$\Delta BED \sim \Delta BMA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BM} = \dfrac{BD}{BA}$ (2)

AD là phân giác của góc A

$\Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$ (3).

Do M là trung điểm của BC nên BM = CM.

Kết hợp với (1), (2) và (3) ta được: CF = BE.

Bài 6: Trong nửa mp bờ AD không chứa điểm B, lấy điểm E sao cho:

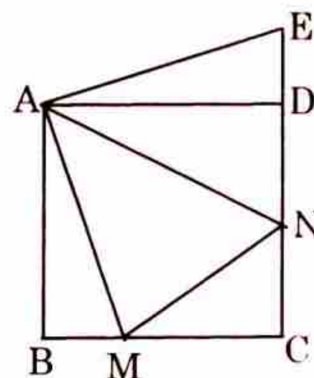
AE = AM và $\widehat{DAE} = \widehat{BAM}$

$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta ABM$

$\Rightarrow DE = BM, \widehat{ADE} = \widehat{ABM}$

Mà ABCD là hình thoi

$\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ABM} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADN}$ (1)



Ta có:

$\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{BAM} + \widehat{NAD} = \widehat{DAE} + \widehat{NAD} = \widehat{EAN}$

Xét hai tam giác ANM và ANE có: $\widehat{MAN} = \widehat{EAN}$, AM = AE và AN chung.

$\Rightarrow \Delta ANM = \Delta ANE \Rightarrow NE = NM$.

Mặt khác ta có: 2 = CM + CN + MN = CM+ CN + NE

Mà 2 = CB + CD = CM + MB + CN + ND= CM + DE + CN + ND

$\Rightarrow$ CM + CN + NE = CM + DE + N + ND

$\Rightarrow$ NE = ND + DE $\Rightarrow$ D thuộc đoạn NE (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADN} = 90^0$.

Suy ra: Hình thoi ABCD có $\widehat{ADC} = 90^0$ nên là hình vuông.

Vậy các góc của hình thoi ABCD bằng 90^0.

Bài 7: Ta có: $\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{2b}{1+b} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2b}{1+b} = 1 - \dfrac{a}{1+a} \Leftrightarrow \dfrac{2b}{1+b} = \dfrac{1}{1+a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+b}{2b} = 1 + a \Leftrightarrow a = \dfrac{1-b}{2b}$.

Do đó: $ab^2 = \dfrac{1-b}{2b}.b^2 = \dfrac{(1-b)b}{2} = \dfrac{1}{2}\left[-\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] \le \dfrac{1}{8}$.

Vậy $ab^2 \le \dfrac{1}{8}$.

Đề số 14

Bài 1: 1. Ta có $\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Thế vào A có kết quả $A = 2^{2008}$.

2. Vì hai số nguyên bất kì sai kém nhau ít nhất một đơn vị, ta có

(I) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 4 \le ab + 3b + 2c$

Hay $\left(a^2 - ab + \dfrac{b^2}{4}\right) + \left(\dfrac{3b^2}{4} - 3b + 3\right) + \left(c^2 - 2c + 1\right) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (c-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c - 1 = 0 \\ \dfrac{b}{2} - 1 = 0 \\ a - \dfrac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Bài 2: 1. Chú ý: $3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$ chia hết cho 91 nên chia hết cho 7 và 13; Mà $A = (3^8 - 3^2) + (3^6 - 1) + (3^{2010} - 1) + 3^2 + 1 + 1$

$= 3^2(3^6 - 1) + (3^6 - 1) + \left((3^6)^{335} - 1\right) + 11$

Vậy $A - 11$ chia hết cho 91.

2. Nhận xét: $(7 + 4\sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3}) = 14$ và $(7 + 4\sqrt{3}).(7 - 4\sqrt{3}) = 1$

Nên $S = (7 + 4\sqrt{3})^3 + (7 - 4\sqrt{3})^3 = 2702 \in Z$. Mặt khác:

$$\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}\right)^3 < \left(\frac{1}{11}\right)^3 < \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$\Rightarrow S - \left(\frac{1}{10}\right)^3 < \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^3 < S \Leftrightarrow 2702 - \frac{1}{1000} < \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^3 < 2702$$

$$\Leftrightarrow 2701,999 < (7 + 4\sqrt{3}^3) < 2702$$

Điều phải chứng minh.

Bài 3: 1. + điều kiện $x \neq m$ và $x \neq 1$ (*). Ta có phương trình đã cho (1)

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = (x + 1)(x - m) \Leftrightarrow mx = 2 - m(2)$

Nếu $m \neq 0$ thì (2) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2 - m}{m}$

+ Để (1) có nghiệm duy nhất thì (2) phải có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện (*), tức là: $m \neq 0$, $\dfrac{2 - m}{m} \neq m$ và $\dfrac{2 - m}{m} \neq 1$. Từ đó suy ra $m \neq 0$, $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Vì x, y, z nguyên dương và vai trò như nhau nên có thể giả sử $x \geq y \geq z$.

Bình phương hai vế của phương trình đã cho:

$x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x - y - z)^2 + 4\sqrt{3}(x - y - z) = 4yz - 12$ (*)

Vì là $\sqrt{3}$ số vô tỉ nên từ (*) suy ra $x - y - z = 0 \Leftrightarrow 4yz - 12 = 0$ hay $yz = 3$ hay $y = 3, z = 1$ và $x = 4$.

Phương trình có nghiệm là: (4, 3, 1) và (4, 1,3).

Bài 4: Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + x^{4014}$. Khi đó:

$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{4014}$

$= \underbrace{(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{4014})}_{m} + \underbrace{(a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{4013})}_{n} = m + n$

$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{4014}$

$= (a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{4014}) - (a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{4013}) = m - n$

Mà: $f(1) = 3^{2007}; f(-1) = 1$.

Suy ra $\begin{cases} m+n=3^{2007} \\ m-n=1 \end{cases}$ hay $m=\frac{1}{3}\left(3^{2007}+1\right); n=\frac{1}{2}\left(3^{2007}-1\right)$ mà m chia hết cho 4 vậy m là số chẵn, $n=m-1$ là số lẻ.

Đề số 15

Bài 1: a. Ta có: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ chia hết cho $(a+b)$

$S=(1^3+50^3)+(2^3+49^3)+(3^3+48^3)+...+(25^3+26^3)$ chia hết cho 51.

$S=(1^3+49^3)+(2^3+48^3)+(3^3+47^3)+...+(24^3+26^3)+50^3$ chia hết cho 25. Vì 25 và 51 nguyên tố cùng nhau, nên S chia hết cho $25.51=1275$.

b. $\begin{cases} x+9y-4xy\le 0\,(1) \\ x+y-4=0 \quad (2) \end{cases}$

+ Từ (2) có: $y=4-x$

+ Thế vào (1) và biến đổi ta được: $(x-3)^2\le 0 \Leftrightarrow x=3$

+ Vậy $x=3$, $y=1$.

Bài 2: 2. Điều kiện: $x\ge 2$.

$\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{x-2}}+\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{x-2}}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1+\left|\sqrt{x-2}-1\right|=2 \Leftrightarrow \left|1-\sqrt{x-2}\right|=1-\sqrt{x-2}$ (áp dụng tính chất $|A|=A \Leftrightarrow A\ge 0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1\le 0 \Leftrightarrow x-2\le 1 \Leftrightarrow x\le 3$

Phương trình có nghiệm: $2\le x\le 3$

Bài 3: . a. Phân tích $A=x^5-x^4y-25x^3y^2+25x^2y^3+144xy^4-144y^5$

$=(x-y)(x-3y)(x-4y)(x+4y)$ gồm 5 thừa số bậc nhất.

+ Nếu $y=0$ thì $A=x^5\ne 77$ với $\forall x$

+ Nếu $y\ne 0$; vì $77=(1)(-1)(7)(-11)=(1)(-1)(-7)(11)$ gồm 4 thừa số đôi một khác nhau và A gồm 5 thừa số đôi một khác nhau.

Vậy $A\ne 77$ với $\forall x,y$. Nên phương trình không có nghiệm nguyên.

b. Điều kiện: $x\ge 5; y\ge 7$. $A=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x-5}}{x}+\frac{\sqrt{y-7}}{y}\right)$

Theo bất đẳng thức Cauchy có:

+ $\sqrt{5}.\sqrt{x-5}\le\frac{5+x-5}{2}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x-5}}{x}\le\frac{1}{2\sqrt{5}}$

+ $\sqrt{7}.\sqrt{y-7}\le\frac{7+y-7}{2}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{y-7}}{y}\le\frac{1}{2\sqrt{7}}$

$$A \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$$

$$MaxA = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \text{khi } x = 10, y = 14.$$

Bài 4: a.

ΔMON có $\hat{P} = 90^0$; I là trung điểm của MN $\Rightarrow PI = \dfrac{MN}{2} = IN$.

$IO \perp MN \Rightarrow IO^2 + IN^2 = NO^2$ vậy $IO^2 + IP^2 = ON^2 = R^2$ (đpcm).

b. Gọi K là trung điểm của PO; kẻ $IH \perp PO$, ta có:

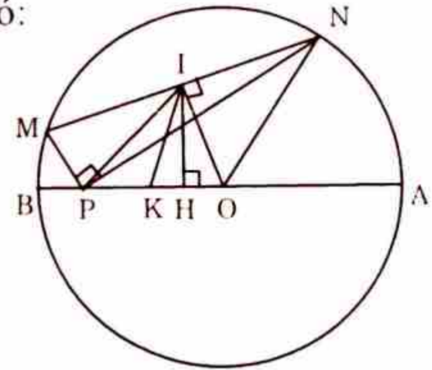
$PI^2 = IH^2 + HP^2$ (1) và $IO^2 = IH^2 + HO^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta được

$$PI^2 + IO^2 = 2IH^2 + PH^2 + HO^2$$

$$= 2KI^2 + PK^2 + KO^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 2KI^2 + \frac{PO^2}{2}.$$



Tức là: $R^2 = 2KI^2 + \dfrac{PO^2}{2} \Rightarrow KI^2 = \dfrac{1}{4}\left(2R^2 - PO^2\right)$

$\Leftrightarrow KI = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - PO^2}$ (không đổi) mà K cố định nên I thuộc đường tròn tâm K bán kính $\dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - PO^2}$

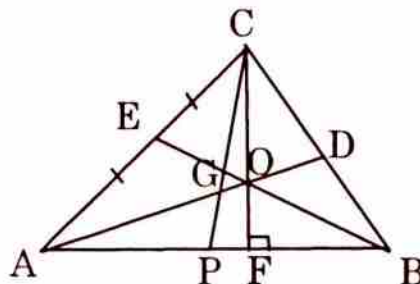
Bài 5: + Giả sử $\widehat{BAC} < 45^0$. Khi đó $\widehat{ACF} > 45^0, \widehat{BCF} < 45^0, \widehat{CBF} > 45^0$ và suy ra BC < AC.

+ Như vậy tia CP nằm giữa hai tia CA và CF và cắt trung tuyến BE tại G. Ta ký hiệu O là điểm cắt của BE, AD, và CF. Thế thì G nằm giữa O và E.

+ Vì $\dfrac{PG}{GC} = \dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{FO}{OC} < \dfrac{1}{2}$. (Ở đây ta dùng $\widehat{FOB} < 90^0$ và suy ra $\widehat{FOG} > 90^0$)

+ Bởi vì AO là phân giác trong tam giác AFC, thì $\dfrac{FO}{OC} = \dfrac{AF}{AC} < \dfrac{1}{2}$, từ đây suy ra $\widehat{ACF} < 30^0$.

Trái với $\widehat{ACF} > 45^0$ ở trên.



MỤC LỤC